PÄDAGOGIUM
Eine Methoden-Sammlung für Erziehung und Unterricht
herausgegeben von Prof. Dr. OSKAR MESSMER
BAND VI, 1

NEUBAU des Rechenunterrichts

Ein Handbuch für alle, die sich mit Rechenunterricht zu befassen haben

von

Johannes Kühnel

Erster Band

Mit über 80 bildlichen Darstellungen

1916
Verlag von Julius Klinkhardt in Leipzig

Vorwort.

Für die Behauptung, daß die pädagogische Literatur der jüngsten Vergangenheit — vor dem Kriege — eine Hochflut von Nichtigkeiten mit sich geführt habe, ist der Beweis nicht allzu schwer zu erbringen; das ist für die deutsche Pädagogik kein Lob; noch weniger ist freilich eins in der anderen Tatsache gegeben, daß so viele dieser Nichtigkeiten eine Menge Käufer fanden.

Und doch darf man beide Erscheinungen nicht lediglich von oben herab, vom idealen Standpunkt aus betrachten, auch der andere, der psychologische, verlangt sein Recht. Von ihm aus gesehen verkünden jene beiden Erscheinungen ein reges geistiges Leben, ein Sehnen und Suchen nach besseren Wegen zum Ziel.

Freilich macht dies Sehnen und Suchen auch nicht Halt vor geheiligten Traditionen; um dem idealen Ziele näher zu kommen, stellt es die Frage nach der Berechtigung ihrer Ansprüche. Dabei ist die Gefahr nicht gering, bei solchem Fluge nach der Höhe den Boden der Wirklichkeit unter den Füßen zu verlieren, sich in Phantasiebildern zu ergehen, die mit dem Leben, wie es nun einmal ist, keinen Zusammenhang haben.

Beides soll und will der ernsthafte pädagogische Schriftsteller vermeiden: Nichtigkeiten zu bringen, die der vervielfachte Abdruck hausbackener, wenn auch zweckmäßiger Praxis oder auch antiquierter Theorien sind, und andrerseits Utopien nachzujagen, die in absehbarer Zeit nicht verwirklicht werden können. Die Erkenntnis dieser beiden Gefahren hat bei manchem Einsichtigen die Wirkung, daß er die Feder hinlegt und das Buch, das er schreiben könnte, nicht schreibt. Ich habe es dennoch getan und bin dafür Rechenschaft schuldig.

Einem Entstehen nachgehen, heißt ein Sein begreifen, das ist der Sinn des „genetischen Verfahrens". Bei seiner Anwendung möge mir der freundliche Leser ein paar Minuten folgen.

Das Gefühl der Unzufriedenheit mit den eigenen Leistungen, von dem man annehmen sollte, daß es im Anfang

jeder Tätigkeit am größten sein und nach und nach abnehmen müßte, zeigte den entgegengesetzten Verlauf: es wurde mit den Jahren immer stärker. Es ist das kein glücklicher Zustand. Er veranlaßte immer mehr Mühe, immer erneute und andersgeartete Versuche, immer größere Vertiefung in die Seele des Unterrichts, in die Seele des Kindes.

Dabei trat das Bewußtsein immer stärker auf, wie unzulänglich und lebensfremd doch die pädagogischen Theorien von gestern und heute sind. Und die Gewissensnöte, in die das Befolgen dieser Theorien brachte, konnten jenes Bewußtsein nur zur Überzeugung verdichten.

In Kontrastwirkung dazu steigerte sich die geradezu fieberhafte Sehnsucht nach sittlicher und intellektueller Hebung unseres Volks und das Verantwortlichkeitsgefühl des suchenden Erziehers.

Aussicht auf Besserung dieses seelischen Zustandes wie der unterrichtlichen Leistungen verhieß nur die schon angedeutete Vertiefung in exakte Untersuchungen des Wesens und Werdens aller Bildungsarbeit. Und langsam und leise tat sich im Laufe der Jahre das Tor der Wahrheit auf, nein, das ist zuviel gesagt; lieber so: Im steten Wechselwirken zwischen rastlosem Studium und praktischem Erproben erschienen Lichtpünktchen, die sich als Leitsterne bewährten, die den Weg aufwärts wiesen zu Höhen, über welche die Dämmerung des Tales keine Macht hat.

Endlich entging es nicht dem immer schärfer werdenden Blicke, wieviel nationale Werte durch eine anders geartete Organisation unsers Erziehungswesens erhalten werden könnten.

Dies sind die allgemeinen Gründe, welche zur Abfassung des vorliegenden Buches drängten. Die besonderen sind rascher dargelegt: Dem Gebiete des Rechnens kommt meine besondere Neigung entgegen, ihm diene ich praktisch über ein Vierteljahrhundert, endlich gewann ich die Überzeugung, daß gerade auf diesem Gebiete die pädagogische Theorie der Vergangenheit am meisten versagt hat, und daß sich von hier aus Neuland erschließen läßt.

Nicht leichten Herzens gebe ich dies Buch heraus. Ich weiß, daß ich gegen vieles Bestehende und „Bewährte" mich wende, daß ich gegen den Strom schwimme, daß ich das Gebäude unsers Unterrichts abzubrechen im Begriffe bin. Und doch kann ich nicht anders, wenn ich der Wahrheit treu bleiben und unserm Volke nicht vorenthalten will, wozu das Geschick mich antreibt.

Ich habe aber guten Mut. Das Versenken in die geheimen Schätze der Vergangenheit stärkte ihn mir: Wer die Geschichte des Rechenunterrichts durchgeht, findet fast überall meine Gedanken in den Anfängen vorhanden, zum Teil voll ausgesprochen bei den großen Meistern der Pädagogik. Aber sie erscheinen vereinzelt, gewissermaßen als Lichtpünktchen in einer großen Menge anderer Ausführungen, denen das Interesse der Verfasser näher stand. Der heutigen exakten Psychologie ist es vorbehalten, diese Gedankenfunken genialer Geister von der Asche zu befreien, ihre Geistesblitze wie in einem Brennpunkte zu sammeln.

Ich habe ferner Mut, weil ich auf dem soeben genannten wissenschaftlichen Standpunkte der Gegenwart stehe, der niemals durch Wortstreit erschüttert werden kann, der immer nur den besser beglaubigten Tatsachen den Vorrang zuerkennt; und dies gegenüber allen möglichen Spekulationen, welche die didaktische Theorie und noch mehr die Unterrichtspraxis heute noch fast völlig beherrschen.

Ich habe endlich auch Mut, weil ich an den deutschen Lehrer der Zukunft glaube, an seine Unzufriedenheit mit sich selbst, an seine Unvoreingenommenheit, an seinen Fleiß, an seine Verantwortungsfreudigkeit, an seine ideale Gesinnung. Diejenigen, die nachsprechen, was man ihnen einlernte, sterben zum Glück mehr und mehr aus. —

Alte Roststellen bekommt man nicht mit einmaligem Putzen blank, und alte, eingerostete Irrtümer lassen sich aus den Gemütern nicht mit zwei Worten oder zwei Sätzen hinwegwischen. Darum wolle man es verstehen, wenn Hauptgedanken wiederholt ausgesprochen werden. Es ist derselbe Grund, aus dem man im Rechnen die Übung preist: Nur durch Wiederholung, und zwar durch Wiederholung an gefühlsbetonten Stellen werden auch in unserem Alter wichtige Gedanken zu unserm geistigen Eigentume. Außerdem ist es beim erstmaligen Studium eines Buches nicht ganz leicht, die grundlegenden Gedanken von den mehr ausführenden zu unterscheiden, wenn jene nicht in irgendwelcher Weise hervorgehoben werden.

Um ein solches vertieftes Studium bitte ich die Amtsgenossen aller Arten von Schulen, und darnach um ein praktisches Ausprobieren. Jenes ist die Voraussetzung. Denn jede Umgewöhnung macht Schwierigkeiten, die im Denken am meisten, und sie werden dazu mit jedem Jahre des Lebens größer. Ferner ist die Umgewöhnung

der Schüler gar nicht so leicht. Es erscheint mir darum nicht ratsam, diejenigen Gedanken, denen man ohne weiteres zustimmen zu können meint, sofort in die Praxis umsetzen zu wollen; ich bitte sehr, auch solche Gedanken erst innerlich völlig zu verarbeiten. Noch mehr gilt dies natürlich von solchen, denen man nicht glaubt zustimmen zu können. Bei solcher Stellungnahme wäre ein „Erproben an der Praxis" nicht beweiskräftig. Es liegt mir selbstverständlich völlig fern, statt alter Glaubenssätze nun neue aufnötigen zu wollen, ich will nur anregen zu eigenem Vertiefen in die Sache und zu eigenem inneren Erwerb. Dann aber wünsche ich jenes Erproben allen deutschen Lehrern von Herzen und hoffe, daß damit unserm Volke ein Stück Erziehung zuteil werde, dessen Notwendigkeit von allen Seiten erkannt und betont worden ist, dessen Verwirklichung aber noch nicht über den toten Punkt hinausgekommen war.

Leipzig, Reminiscere im Kriegsjahre 1916.

Johannes Kühnel.

Inhalt des ersten Bandes.

Die Vorarbeiten.

Der Aufbau.

I. Teil: Die Grundlagen.

II. Teil:

III. Teil: Das Lehrverfahren.

5. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Zur äußeren Form der bisherigen Bildungsstufen.

6. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die weiteren Rechnungsarten.

Inhalt des zweiten Bandes.

7. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Zusammenfassungen.

IV. Teil des Aufbaues: Der Lehrplan.

V. Teil des Aufbaues:

Die Vorarbeiten.

§ 1. Ziel, Klage und Schuldfrage.

Daß unsere Kinder zu deutscher Sittlichkeit und Stärke erzogen werden, daß ihr Wille den höchsten Aufgaben unsres Volkes zustreben lerne, darin besteht die allgemeine Aufgabe aller Unterrichtsfächer aller unsrer Erziehungsschulen. Nur im Bewußtsein und im Rahmen dieser allgemeinen Aufgabe hat jedes Fach seine Sonderaufgaben zu kennzeichnen, seine Sonderpflichten zu erfüllen.

Dem Rechenunterricht werden zwei solcher Sonderaufgaben zugewiesen, und zwar von den Erziehungsfachleuten sowohl wie von den gesetzlichen Bestimmungen:

er soll die „allgemeine Geistesbildung", insbesondere das Denken des jugendlichen Menschen fördern — seine formale Aufgabe;

er soll die für das praktische Leben nötigen Kenntnisse und Fertigkeiten dem Schüler übermitteln — seine materiale Aufgabe.

Nun ist die Klage allgemein, daß unser gegenwärtiger Rechenunterricht diese Ziele in der Hauptsache **nicht erreiche**, vielleicht gar nicht erreichen könne.

Als Beweis für diese Behauptung dient zunächst die von den verschiedensten Seiten bestätigte Erfahrung, daß junge Leute, die nur kurze Zeit dem Rechenunterricht der Volksschule entwachsen waren, in erschreckendem Maße versagten, wenn ihnen einfache Rechenaufgaben des praktischen Lebens vorgelegt wurden. Dazu kommt die andere Erfahrung, daß viele Schüler höherer Lehranstalten nicht imstande sind, die Aufgaben der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten zu lösen, obwohl sie in der Algebra Befriedigendes leisten. Endlich muß noch auf die weitere Tatsache hingewiesen werden, daß ein großer Teil unsres Volkes durch seine gesamte Wirtschaftsgebahrung zeigt, daß er nicht rechnen kann; sei es, daß zuviel ausgegeben wird für entbehrliche Dinge oder den sogenannten „bescheidenen" Luxus; sei es, daß am unrechten Orte gespart wird; sei es endlich, daß Unternehmungen aller Art begonnen und weitergeführt werden ohne genügende Einzelkenntnisse und Er-

fahrungen oder ohne hinreichendes Betriebskapital. Und das gilt nicht nur von den Jugendlichen beider Geschlechter, von Lehrlingen und Fabrikmädchen besonders, auch ältere Leute in großer Zahl zeigen diese „Rechenlosigkeit". Geschäftsgründungen aller Art, Unterbietungen bei öffentlichen Arbeiten und ähnliche Vorkommnisse sind des Zeuge; ein großer Teil der Arbeit unsrer Gerichte ist darauf zurückzuführen; Geistliche und Armenpfleger wissen davon zu erzählen, und der Krieg hat uns Beispiele in Menge gezeigt, die geeignet sind, jeden Vaterlandsfreund mit nicht geringer Sorge zu erfüllen.

Bei solchen und ähnlichen Erscheinungen ist die Allgemeinheit leicht geneigt, die Güte des genossenen Unterrichts in Zweifel zu ziehen, vielleicht auch einzelne Persönlichkeiten und Einrichtungen für den erkannten Mangel verantwortlich zu machen, und womöglich eine Schulreform zu fordern, die dem angeblich so dürftig bedachten Fache durch erhebliche Vermehrung seiner Stundenzahl aufhelfen soll.

Demgegenüber neigen Schulmänner und Schulbehörden[1]) nicht selten dazu, jede Verantwortung der Schule abzulehnen. Sie könne nichts dafür, wenn einzelne Schüler nicht fleißig oder nicht aufmerksam genug gewesen wären oder das Erworbene nicht festzuhalten wüßten.

Sie weisen mit Recht darauf hin, daß auf wenigen Gebieten der Didaktik so emsig gearbeitet worden ist, wie gerade auf dem Gebiete des Rechenunterrichts: die Stufenfolge ist aufs genaueste festgesetzt und nachgeprüft, die Methoden sind aufs feinste ausgearbeitet.

Gleichwohl kann sich die Schule nicht der Tatsache verschließen, daß — zumal in den Kreisen wohlmeinender Lehrherren — eine tiefgehende Unzufriedenheit mit den Ergebnissen unsres Rechenunterrichts herrscht; auch sie kann sich des Eindrucks nicht erwehren, daß trotz allen Fleißes und aller persönlichen Bemühungen, trotz aller Kleinarbeit und aller Treue die Sache doch nicht recht vorwärts gehen will.

Bei solcher Lage der Sache ist die Vermutung nicht von der Hand zu weisen, daß der Fehler vielleicht an den **Grundlagen** liege, auf denen der gegenwärtige didaktische und lehrplanmäßige Aufbau ruht. Diese Vermutung zu entkräften oder zu bestätigen, ist **wissenschaftlicher Bearbeitung** vorbehalten, einer Bearbeitung, die die angeführten Erscheinungen von den Zufälligkeiten des einzelnen Vorkommens entkleidet und damit die Tatsachen des

[1]) Nicht die Schulbehörden sind an dem Übel schuld. Sie haben mit ihren Erlassen die beste Absicht. Aber diese können nur wiederspiegeln, was Forschung und Praxis bis zur Gegenwart gewonnen haben. Übrigens läßt sich mit Sonderverfügungen das Übel nicht an der Wurzel packen, nur Hebung der Bildung, vor allem der Lehrerbildung verheißt Erfolg.

Klagegrundes einwandfrei feststellt, die dem Entstehen solcher Erscheinungen nachgeht, ihre Ursachen aufdeckt und ihre Bedingungen untersucht und endlich infolge ihrer allgemeinen Beherrschung der in Betracht kommenden Grundsätze in der Lage ist, Heilmittel zu empfehlen, die nicht die Symptome der Krankheit zurückdrängen, sondern ihre Ursachen zu beheben verheißen.

§ 2. Die Untersuchung.

Die wissenschaftliche Bearbeitung der verschiedenen Erziehungs- und Unterrichtsgebiete, deren Studium ohne weiteres solche Fragen, wie sie oben aufgeworfen wurden, beantworten könnte, gibt es noch nicht. Das ist keine zu weit gehende Behauptung, und wir treten damit auch den Klassikern der Pädagogik nicht im geringsten zu nahe. Denn einmal hat der Begriff der wissenschaftlichen Bearbeitung immer nur Gegenwartswert, d. h. jede wissenschaftliche Annahme hat nur so lange Geltung, bis sie durch neuere Forschungen überholt wird, und sodann haben die pädagogischen Klassiker, die Philosophen unter ihnen nicht ausgenommen, das Gesamtgebiet der Erziehung wie ihre Einzelgebiete in der Hauptsache intuitiv, gefühlsmäßig bearbeitet. Erst die jüngere Vergangenheit hat sich den exakten wissenschaftlichen Methoden zugewendet — die neuere Psychologie ist ihr Bahnbrecher, und so darf man weiter behaupten: eine wissenschaftliche Bearbeitung der verschiedenen Erziehungs- und Unterrichtsgebiete ist im Entstehen.

Daß das nicht schon früher geschehen ist, hat seinen Grund darin, daß die beiden wichtigsten Arten ihrer Vertreter nicht am Werke waren: die Lehrer der höheren Unterrichtsanstalten fühlten sich — man kann fast sagen: durchweg — als Fachwissenschaftler, als Philologen, Theologen, Mathematiker usw. Sie wurden in dieser Auffassung bestärkt durch die allgemeine Meinung, die selbst leitende Kreise teilten, es brauche jemand nur ein tüchtiger Wissenschaftler zu sein, dann werde er auch zu den tüchtigsten Lehrern und Erziehern zählen. Diese Meinung hat sich ja bis in die Gegenwart erhalten, merkwürdigerweise selbst in sonst gebildeten Kreisen, auch ein Zeichen dafür, wie jung die Erziehungswissenschaften eigentlich sind. Der andern Gruppe der Pädagogen aber, den Volksschullehrern, fehlte bis dahin zum größten Teil das wissenschaftliche Rüstzeug zur Mitarbeit an exakten Untersuchungen auf dem Gebiete der Erziehungswissenschaften. Nach beiden Richtungen hin sind seit etwa einem Menschenalter leise und zuletzt schon stärkere Änderungen bemerkbar geworden: Eine große Zahl hervorragender Vertreter sowohl der Universitäten, wie der höheren Bildungsanstalten, wie auch der Volks-

schulen bemüht sich erfolgreich um eine wissenschaftliche Bearbeitung der verschiedensten Erziehungs- und Unterrichtsgebiete.

Das verhältnismäßig späte Erscheinen der Pädagogik als Wissenschaft hat noch einen weiteren Grund. Er besteht darin, daß man — eigentlich nur schwach bewußt — von jeder neu erscheinenden Wissenschaft vollkommene Exaktheit verlangte. Das ausgehende 18. Jahrhundert führte schon leise diesen Gedanken, das 19. führte ihn zielbewußt durch; Geologie und Psychologie sind Beispiele dafür. Die Pädagogik als Gesamtheit der Erziehungswissenschaften konnte aber diese vollkommene Exaktheit in allen ihren Teilen nicht aufweisen und begegnete deshalb grundsätzlichen Widerständen. Diese hätten sich nicht erhoben, wenn man sich klar gemacht hätte, daß jene Forderung vollkommener Exaktheit im Sinne systematischer Widerspruchslosigkeit wohl im Ideal zu Recht besteht, in der Wirklichkeit des Lebens aber eine willkürliche Einengung des bis dahin bestehenden Wissenschaftsbegriffes bedeutet. Denn die Pädagogik gehört wie Medizin und Jurisprudenz zu den angewandten Wissenschaften, die wohl in ihren sämtlichen Grundlagen exakt gestaltet werden können, aber in Zielen, Mitteln und Methoden in wechselseitiger Abhängigkeit stehen zu der Praxis des flutenden wirklichen Lebens, das immer neue Fragen stellt.

Der Vergleich mit der Medizin und Jurisprudenz, der sich auch dem einfacheren Verstande aufdrängt, zeigt nun auch, daß eine rein theoretische Bearbeitung der Erziehungs- und Unterrichtswissenschaften weder zweckmäßig noch möglich ist. Das Wesen der Erziehung wie des Unterrichts verlangt vielmehr eine wissenschaftliche Behandlung, bei welcher die unzweifelhaften Ergebnisse peinlicher Untersuchungen vielfältig und ununterbrochen an der wirklichen Unterrichtsarbeit nachgeprüft werden, bei der die Fragestellung jener Untersuchungen von der wirklichen Erziehungs- und Unterrichtstätigkeit auszugehen hat, mit andern Worten: bei der Theorie und Praxis durchaus Hand in Hand gehen müssen — genau wie bei Medizin und Jurisprudenz.

Auf dem Gebiete des Rechenunterrichts liegen zwar schon eine ganze Anzahl wissenschaftlicher Arbeiten vor, aber sie beschränken sich auf kleine und kleinste Teilgebiete[1]). Diejenigen Werke aber, welche das Gesamtgebiet zu umfassen trachten, sind mehr schulprak-

[1]) Meumann behandelt das Rechnen im 3. Bande seiner „Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik" (Leipzig 1914) — der mir soeben zu Gesicht kommt, nachdem ich das vorliegende Werk im stenographischen Entwurf abgeschlossen habe — und berichtet dabei über die in Betracht kommende Literatur. Freilich kann auch sein Werk, das von einer erstaunlichen Belesenheit und von

tischer als wissenschaftlicher Art. Diese letzten sind ungemein zahlreich, bauen auf persönlicher Erfahrung und auf persönlichen Erfolgen, lassen aber in den meisten Fällen den Zusammenhang mit der Wissenschaft vermissen. Sie nehmen Stellung zu Forderungen von subjektiver Bedeutung und begründen mit landläufigen Annahmen, die aber vor exakter Forschung nicht bestehen können. Jene ersten Arbeiten aber leiden oft an dem entgegengesetzten Mangel: sie haben nicht genug Beziehung zur Praxis; insbesondere fehlt ihnen häufig die Formulierung, welche die Praxis an die Hand geben könnte. Dazu muß die einzelne Frage mit dem Blick auf das Gesamtgebiet ins Auge gefaßt werden. Folgendes könnten solche Fragen sein: Wie (und wann) werden Zahlbegriffe von einer gewissen Struktur gewonnen? Wie (und wann) erscheinen die Operationsbegriffe? Wie gestaltet sich der Erwerb der Rechenkenntnisse? Wie ihre Anwendung? Welche Wirkung hat eine stark wechselnde Veranschaulichung? Welche das Entwickeln? Welche der Wechsel zwischen Kopfrechnen und schriftlichem Rechnen? Welche Wirkung haben dauernd hohe Anforderungen? Welche Wirkung dauernd tiefe Anforderungen? Welche Wirkung haben im Rechnen einer bestimmten Altersstufe die Hausaufgaben? Welche Wirkung hat der Abteilungsunterricht? Sind die Geschlechter in bezug auf Zahlauffassung verschieden? In bezug auf Operationsauffassung? In bezug auf Anwendungsgeschicklichkeit? Sind die Ziele der einzelnen Stufen richtig ausgedrückt? Ist der Lehrplan richtig angelegt? usw.

Solche und noch viele andere Aufgaben im Gebiete des Rechenunterrichts harren der Lösung von seiten der psychologischen Forschung in Verbindung mit der erziehlichen und unterrichtlichen Tätigkeit.

Das vorliegende Werk erhebt nicht den Anspruch, diese Lösung herbeizuführen. Es will nur ihr Wegbereiter sein. Indem es psychologische Tatsachen didaktischen Grundsätzen gegenüberstellt, welche zum Irrtume werden, sobald ihnen allgemeine Gültigkeit zugesprochen wird, will es auf die Grundlinien eines Neubaues hinarbeiten, der den Klagen und Wünschen der Gegenwart gerecht wird.

Mit diesem Bilde läßt sich einmal der allgemeine Eindruck wiedergeben, den wir Pädagogen selbst vom Rechenunterricht haben, zum andern läßt es sich sowohl im Sinne einer Arbeitshypothese wie auch in dem der Begründung unserer Fragestellungen wohl verwerten. Es sei darum noch mit einigen Worten näher ausgeführt: Das in der

raschester Erfassung der Probleme zeugt, den Mangel an Beziehungen zur Praxis nicht verleugnen, von dem weiter unten die Rede ist. Und das sogar, obwohl Meumann — zu seinem besonderen Ruhme sei dies ihm nachgesagt — nicht müde wurde, die Beziehungen zur Praxis hochschätzend zu betonen und sie aufrichtig zu suchen.

Erfahrung gesammelte Können und die Notwendigkeiten des Tages haben in jahrhundertelangem langsamen Aufbau das Gebäude des Rechenunterrichts aufgerichtet. Nicht ein geistvoller Wurf ist es, wie etwa ein gotischer Dom oder ein Renaissanceschloß, es ist eher einem Miethause, einer Kaserne oder einer alten Fabrik zu vergleichen, mit vielen Gängen, Treppen, Höfen, Böden, Absätzen u. dergl. Nun müssen wir drin wohnen und arbeiten, aber wir fühlen uns unbehaglich. Es ist zu eng, zu niedrig, zu dunkel, zu rissig, die Balken biegen sich, weite Gänge müssen unbenutzt liegen, und dabei fehlt noch das wichtigste: die Möglichkeit der Ausbreitung. Was Wunder, wenn wir uns mit dem Gedanken des Abbaues tragen, der Platz machen soll für einen Neubau, der den Anforderungen der neuen Zeit im höchsten Maße zu entsprechen hätte, weit und luftig und licht, vor allem aber zweckmäßig und freundlich, ohne allen angeklebten Stuck, dafür echt, wahr und fest.

Ehe aber solch weittragender Entschluß gefaßt werden kann, müssen wir erst zu der Überzeugung gelangen, daß ein solcher Neubau nicht nur möglich und wünschenswert, sondern notwendig ist. Diese erst kann unsern Bestrebungen die nötige Triebkraft verleihen.

Um sie zu gewinnen, ist es nötig, den alten Bau nochmals aufs genaueste zu prüfen.

Was im einzelnen verlangt wird, und wie man die Einzelziele zu erreichen sucht, das ist durchaus nicht so gering an Bedeutung, daß es in einer Reformschrift überschlagen werden dürfte. Auch nicht vom Leser. Denn es sind Voraussetzungen, die in den Einzelheiten nicht jedem Pädagogen bekannt sein können, die aber zum Verständnis der folgenden Darlegungen unentbehrlich sind.

Es mögen zunächst eine Anzahl Lehrpläne folgen.

§ 3. Lehrpläne der Gegenwart.

1. Die „Allgemeinen Bestimmungen" vom 15. Oktober 1872[1]).

Der Rechenunterricht.

Auf der Unterstufe werden die Operationen mit benannten und unbenannten Zahlen im Zahlenraume 1—100, auf der mittleren diejenigen im unbegrenzten Zahlenraume mit benannten und unbenannten Zahlen gelernt und geübt; auf der letzteren auch angewandte Aufgaben aus der Durchschnittsrechnung, Resolutionen und Reduktionen und einfache Regeldetri gerechnet; Pensum der Oberstufe sind die Bruchrechnung, welche bereits auf den unteren Stufen in der geeigneten Weise vorbereitet werden muß, und deren Anwendung in den bürgerlichen Rechnungsarten, sowie eingehende Behandlung der Dezimalbrüche.

In der mehrklassigen Schule erweitert sich das Pensum in den bürgerlichen Rechnungen durch Aufnahme der schwierigen Arten und das in der Rechnung mit Dezimalen durch die Lehre von den Wurzelextraktionen.

Auf der Unterstufe wird in der Schule mit einem oder zwei Lehrern, soweit es sein kann, in der mehrklassigen Schule regelmäßig nur im Kopfe gerechnet. Bei Einführung einer neuen Rechnungsart geht auf allen Stufen das Kopfrechnen dem Tafelrechnen voran. Bei der praktischen Anleitung ist überall die Beziehung auf das bürgerliche Leben ins Auge zu fassen; darum sind die Exempel mit großen und vielstelligen Zahlen zu vermeiden und die angewandten Aufgaben so zu stellen, wie sie den wirklichen Verhältnissen entsprechen.

Durch diese Aufgaben sind die Schüler zugleich mit dem geltenden Systeme der Maße, Münzen und Gewichte bekannt zu machen.

Das Rechnen ist auf allen Stufen als Übung im klaren Denken und richtigen Sprechen zu betreiben; doch ist als der letzte Zweck stets die Befähigung der Schüler zu selbständiger, sicherer und schneller Lösung der ihnen gestellten Aufgabe anzusehen.

Dem Unterricht sind in allen Schulen Aufgaben-(Schüler-)hefte, zu denen der Lehrer das Fazitbüchlein in Händen hat, zugrunde zu legen.

[1]) Aus „Lietzmann, Die Organisation des mathematischen Unterrichts an preußischen Volks- und Mittelschulen". IMUK-Schriften Band V, Heft 6, Leipzig 1914, Teubner.

2. Lehrplan für die einfachen Volksschulen des Königreichs Sachsen vom 5. Nov. 1878 (11. Auflage 1911).

§ 4. Rechnen.

1. Der Rechenunterricht soll die Schüler befähigen, im Verkehr des gewöhnlichen Lebens vorkommende Berechnungen selbständig und sicher auszuführen.

2. Die Schüler sind daher in anschaulich-entwickelnder Weise zum Verständnis der einzuschlagenden Rechenoperationen anzuleiten, hauptsächlich aber in der mündlichen und schriftlichen Lösung praktisch gewählter Aufgaben mit mäßigen Zahlen zu üben.

3. Innerhalb der ersten vier Schuljahre werden die Grundrechnungsarten in den Gebieten 1—10, 1—100, 1—1000 teils mit gleich-, teils mit ungleichbenannten Zahlen erläutert und geübt; doch soll die Erweiterung des Zahlenraumes über 1000 hinaus nicht ausgeschlossen sein. Dabei ist die Kenntnis der deutschen Münzen, Maße und Gewichte zu begründen, die Bruchrechnung durch gelegentliche Anwendung der gebräuchlichsten gemeinen und Dezimalbrüche, die Regeldetri durch Gewöhnung an den Schluß über die Einheit vorzubereiten.

4. Demgemäß wird innerhalb der letzten vier Schuljahre zuvörderst die Einübung der Grundrechnungsarten fortgesetzt und zu Ende geführt; alsdann gelangt die Rechnung mit Brüchen, vornehmlich mit Dezimalbrüchen, endlich die Regeldetri unter Anwendung auf die wichtigsten bürgerlichen Rechnungsarten zur Behandlung. Die Regeldetriaufgaben werden lediglich nach dem Schlusse über die Einheit, nicht nach Proportionen gelöst.

5. Mündliches und schriftliches Rechnen sind in Verbindung zu betreiben.

6. Bei schriftlichen Berechnungen ist auf Sorgfalt der Ausführung streng zu halten.

7. Die Zahl der Abteilungen ist in allen Klassen möglichst zu beschränken.

8. Als Lehrmittel sind außer der Rechenmaschine Aufgabenhefte für die Hand der Schüler erforderlich.

3. Lehrplan für die Volksschulen Württembergs vom 8. März 1907.

§ 16. Rechnen.

Ziel. Die Schüler sollen befähigt werden, die grundlegenden Zahlenoperationen mit völliger Sicherheit vorzunehmen und die im gewöhnlichen Leben vorkommenden Berechnungen mit klarem Einblick in die sachlichen Verhältnisse richtig und selbständig auszuführen.

1. Schuljahr: Zahlenraum 1—100. Zusammenzählen und Abziehen mit den Zahlen 1—5 mit und ohne Zerlegen. Einfache schriftliche Übungen. Benennungen: ₰, ℳ.

2. Schuljahr: Mündliche (Zahlenraum 1—100): Zusammenzählen und Abziehen mit den Zahlen 1—9. Zusammenzählen und Abziehen 2stelliger Zahlen. Das Einmaleins und Einsineins bis zum 5er. Schriftlich: Zusammenzählen und Abziehen zunächst 2stelliger, später auch 3stelliger Zahlen. Benennungen, ℳ, ₰; m, cm.

3. Schuljahr: Mündlich (Zahlenraum 1—1000): Zuzählen 2stelliger Zahlen zu 2- und 3stelligen, Abziehen 2stelliger Zahlen von 2- und 3stelligen. Das kleine Einmaleins und Einsineins ganz; Multiplizieren 2stelliger Zahlen mit einstelligen. Dividieren 2- und 3stelliger Zahlen durch einstellige, wobei der Dividend das 100fache des Divisors nicht überschreiten soll. Schriftlich: Die 4 Grundrechnungsarten mit einfach benannten und reinen Zahlen. Numerieren, Zusammenzählen und Abziehen bis zu 6stelligen Zahlen. Multiplizieren bis zu 4stelligen Zahlen mit 1- und 2stelligen, Dividieren 2- bis 6stelliger Zahlen durch 2—9 und durch die reinen Zehnerzahlen. Benennungen: ℳ, ₰; m, cm; hl, l; kg, g; km, m. Beim mündlichen Multiplizieren und Dividieren ist das Verwandeln der Münzen, Maße und Gewichte in die nächst höhere oder nächst niedere Sorte anzuwenden.

4. Schuljahr: Mündlich: Vom Einmaleins den 12er, 15er und 25er. Die 4 Grundrechnungsarten mit doppelt benannten Zahlen in leichteren Fällen. Bruchlehre in einfachen Beispielen. Schriftlich: Numerieren bis zu 7stelligen Zahlen. Fortsetzung der Übungen in den Grundrechnungsarten mit ganzen (reinen und einfach benannten) Zahlen; Multiplikator bis zu 4 Stellen, Divisor bis zu 3 Stellen. Weitere Benennungen: m, mm; dz, kg; t, kg. (Die Flächen- und Körpermaße kommen bei der Raumlehre zur Behandlung.) Dezimalbrüche (bis zu 3 Stellen) mit Anwendung auf unser Münz-, metrisches Maß- und Gewichtssystem: 1. Mündliche Einführung in das Wesen des Bruchs an der Hand der einfachsten gemeinen Brüche. Grundlegende Übungen mit diesen Brüchen. 2. Einführung in die Zehntel und Hundertstel mit Anwendung auf die hundertteiligen Münzen, Maße und Gewichte (ganz auf die Anschauung gegründet); dezimale Schreibweise doppelt benannter Zahlen. Zusammenzählen und Abziehen, vor allem in angewandten Aufgaben, wobei diese auch mit ungleich benannten Zahlen zu lösen sind. 3. Einführung in die Tausendstel unter Anwendung auf 1000teilige Maße und Gewichte. Zusammenzählen und Abziehen wie bei den Hundertsteln. 4. Multiplizieren und Dividieren durch 10, 100 und 1000 mit weiteren Übungen im Verwandeln höherer dezimaler Maße in niedere und umgekehrt. 5. Multiplizieren mit ganzen Zahlen unter Anwendung

auf Zweisatzaufgaben. 6. Dividieren durch ganze Zahlen unter Anwendung auf Zweisatzaufgaben.

5. Schuljahr: Mündlich: Aus den vier Grundrechnungsarten: Multiplizieren 2stelliger Zahlen mit einfachen Hunderter- und Tausenderzahlen und umgekehrt; weitere Übungen mit doppelt benannten Zahlen. Übungen in gemeinen Brüchen. Schriftlich: Gemeine Brüche mit Beschränkung auf das Unentbehrlichste: 1. Lesen und Schreiben. 2. Verwandeln benannter Zahlen (auch der nichtdezimalen Maße Dutzend, Gros, sowie der Zeitmaße) in Brüche der nächst höheren Stufe und umgekehrt (leichte Verhältnisse). 3. Verwandeln ganzer und gemischter Zahlen in Brüche und umgekehrt. 4. Zusammenzählen und Abziehen gleichnamiger Brüche. 5. Multiplizieren und Dividieren von Brüchen und gemischten Zahlen mit ganzen Zahlen. Anwendung in Zweisatzaufgaben. 6. Erweitern und Vereinfachen der Brüche. 7. Gleichnamigmachen ungleichnamiger Brüche, wobei der Hauptnenner nur dann 100 übersteigen soll, wenn er eine leicht teilbare Zahl (z. B. 120, 160) ist. 8. Zusammenzählen und Abziehen ungleichnamiger Brüche. 9. Multiplizieren und Dividieren, wobei Multiplikator und Divisor Brüche und gemischte Zahlen sind. Anwendung in Zweisatzaufgaben. Dezimalbrüche: Übungen in den vier Grundrechnungsarten (bis zu 6 Stellen), auch Multiplizieren und Dividieren von Dezimalbrüchen mit Dezimalbrüchen. Angewandte Aufgaben. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und endlicher Dezimalbrüche in gemeine Brüche; Lösen angewandter Aufgaben sowohl mit gemeinen als mit Dezimalbrüchen. Ansatzbrüche. Dieser Rest der Dezimalbruchlehre kann nach der Behandlung der gemeinen Brüche oder gleichzeitig mit den entsprechenden Abschnitten aus den gemeinen Brüchen erledigt werden. Werden die gemeinen Brüche vor den Dezimalbrüchen behandelt (siehe Behandlung), so geht man im 4. Schuljahr etwa bis zum Erweitern und Vereinfachen der gemeinen Brüche; der Rest ist dem 5. Schuljahr zuzuweisen, in welchem dann auch die Dezimalbrüche unter Anwendung auf die mehrfach benannten Zahlen behandelt werden.

6. Schuljahr: Nach kurzer Wiederholung der Zweisatzaufgaben Dreisatz in geraden und umgekehrten Verhältnissen unter Anwendung auf Preis-, Tausch-, Durchschnitts- und einfache Mischungsrechnungen (Frage nach dem Quantum der zu mischenden Sorten ist auszuschließen), Münzumrechnungen, einfachere Gewinn- und Verlustrechnungen. Die Prozentrechnung, Anwendung auf Rabatt- und Tararechnungen, Kosten- und Überschlagsberechnungen, Gewinn- und Verlustrechnungen, einfache Zinsrechnungen mit Frage nach dem Zins. (Längen- und Flächenberechnungen siehe Raumlehre.) Bei allen Prozentrechnungen sind hier wie im 7. Schuljahr diejenigen

Aufgaben auszuschließen, bei denen aus der um den Prozentwert vermehrten oder verminderten Grundzahl und der Prozentzahl die Grundzahl zu suchen ist, z. B. Aufgaben, in denen aus Verkauf und Gewinn (in %) der Einkauf, aus Barzahlung und Rabatt (in %) der Rechnungsbetrag gefunden werden soll.

7. Schuljahr: Schwierigere Zinsrechnungen mit Frage nach Zins, Zinsrechnungen mit Frage nach Zinsfuß und Kapital, einfache Zielerrechnungen, Berechnung des Barwerts von Wertpapieren (Obligationen und Wechsel), einfache Promillerechnungen, Teilungs- und Geschäftsrechnungen (nur praktische Fälle), zusammengesetzte Arbeits- und Verbrauchsrechnungen. (Flächen- und Körperberechnungen siehe Raumlehre.)

8. Klasse: Schwierigere Aufgaben aus allen Kapiteln der Bruchlehre und der bürgerlichen Rechnungsarten, insbesondere aus den oben ausgeschlossenen Kapiteln der Prozent-, Mischungs- und Teilungsrechnungen; auch Verhältnisrechnungen.

Behandlung.

In bezug auf die strittigen Fragen der Methode des Rechenunterrichts (z. B. die Stellung der gemeinen Brüche im Lehrgang, das Speziesrechnen an Stelle des Rechnens mittels Ansatzes) ist eine Vereinbarung durch den Lehrerkonvent herbeizuführen.

Innerhalb des einzelnen Schuljahrs ist die Reihenfolge der Stoffe in das freie Ermessen des Lehrers gestellt.

Die Schüler sind in anschaulich entwickelnder Weise in das Verständnis der einzelnen Rechnungsarten einzuführen und insbesondere zu klarem Erfassen der den Aufgaben zugrunde liegenden Sachverhältnisse anzuleiten.

Bei diesen angewandten Aufgaben ist auf die Fächer des Sachunterrichts in ungezwungener Weise Rücksicht zu nehmen; vor allem aber ist die Beziehung auf das bürgerliche Leben und seine Bedürfnisse (Arbeit, Handel und Verkehr, Nahrung, Kleidung, Wohnung) ins Auge zu fassen.

Die Sach- und Zahlenverhältnisse sind so zu wählen, wie sie das gewöhnliche Leben bietet; deshalb sind Aufgaben mit zu verwickelten Sachverhältnissen oder mit allzugroßen Zahlen zu vermeiden. Auch sollen nicht Aufgaben bevorzugt werden, die darauf angelegt sind, daß das Ergebnis ohne Rest abschließt.

Wenn auch auf der Unter- und Mittelstufe das Hauptaugenmerk auf die Erzielung einer sicheren Rechenfertigkeit zu richten ist, so sind doch auch auf diesen Stufen angewandte Aufgaben unter Zugrundlegung der einfachsten Sachverhältnisse — hauptsächlich beim mündlichen Rechnen — zu lösen.

Mit dem metrischen Maß- und Gewichtssystem sind die Schüler

auf der Unter- und Mittelstufe allmählich vertraut zu machen. Da das schriftliche Rechnen mit doppelt benannten Zahlen nach vorstehendem Lehrgang erst in Verbindung mit dem Dezimalbruchrechnen auftritt, so ist hierbei das metrische System geradezu in den Mittelpunkt zu stellen und auch in angewandten Aufgaben, vor allem in Zweisatzrechnungen, tüchtig zu üben.

Bei allen Rechnungsarten soll eine bestimmte Lösungsweise als das Normalverfahren den Schülern sicher zu eigen gemacht werden; dann können sie auch zu mehrfacher Lösung der Aufgaben, namentlich zur Anwendung naheliegender Rechenvorteile, besonders im Kopfrechnen, angeleitet werden.

Im Kopfrechnen ist bei der Ausführung der vier Grundrechnungsarten immer zum Zerlegen der Zahlen anzuleiten und die dem Wesen des Kopfrechnens widersprechende Art des Zifferrechnens möglichst auszuschließen. Allzugroße Anforderungen an das Zahlengedächtnis sind zu vermeiden, dagegen ist dem mündlich-schriftlichen Rechnen genügend Raum zu geben. Auf sorgfältiges Sprechen ist auch in diesem Fache zu achten.

Beim schriftlichen Rechnen ist streng auf übersichtliche Darstellung, Deutlichkeit der Ziffern und der Rechenzeichen, Sauberkeit und Genauigkeit in in der ganzen Leistung zu halten. Das Rechnen mit der Feder ist wenigstens vom 4. Schuljahr an gegenüber dem Tafelrechnen zu bevorzugen. Das Führen von besonderen Rechenreinheften ist überflüssig.

Vor Abschluß der Rechnung ist, wo es angeht, durch Abschätzen und Überschlagen die Richtigkeit des Ergebnisses im allgemeinen nachzuprüfen, wodurch namentlich Fehler im Setzen des Kommas sofort aufgedeckt werden.

Regelmäßige Wiederholungen sind sowohl beim mündlichen als beim schriftlichen Rechnen notwendig; dabei sind die grundlegenden Übungen im Rechnen mit Ganzen und Brüchen vor allem zu berücksichtigen. Auch sollen durch zweckmäßige Mischung der Aufgaben die Schüler immer wieder zu selbständiger Entscheidung über die zu wählende Rechenoperation veranlaßt werden.

Beim Rechenunterricht sollten wenigstens in den Mittel- und Oberklassen Aufgabensammlungen benützt werden. Doch soll der Lehrer in selbständiger Beherrschung des Stoffs eine geeignete Auswahl treffen, immer wieder auch Aufgaben diktieren und dadurch besonderen Bedürfnissen (örtliche Verhältnisse, Mädchenklassen im Unterschied von Knabenklassen) gerecht werden.

4. Lehrplan für die Primarschulen des Kantons Graubünden vom 14. Okt. 1903.

VIII. Rechnen.

1. Schuljahr: Geläufiges Rechnen im Zahlenraume von 1—10 in allen Spezies.
2. Schuljahr: Entwicklung der Zahlenreihe von 1—100 in reinen Zehnern und Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren mit diesen. Entwicklung der Zahlenreihe von 10—100 mit allen zwischenliegenden Zahlen. Addition und Subtraktion in diesem Zahlenraum mit 1- und 2stelligen Zahlen.
3. Schuljahr: Multiplikation und Division zweistelliger Zahlen durch einstellige im Zahlenraum bis 100. Entwicklung der Zahlenreihe bis 1000. Die 4 Operationen bis zu dieser Grenze.
4. Schuljahr: Rechnen im unbegrenzten Zahlenraum (Vermeidung großer Zahlen). Die einfachsten Übungen mit gemeinen Brüchen, wenn die Aufgaben mit ganzen Zahlen zu solchen führen.
5. Schuljahr: Entwicklung der Zahlenreihe von den Einern aus nach rechts: Dezimalzahlen. Das metrische Maß und Gewicht. Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen. Multiplikation und Division von Dezimalzahlen durch ganze. Gemeine Brüche wie im 4. Schuljahr. Der erste Fall der Zinsrechnung: Der Zins wird gesucht. Andere Drei- und Vielsatzrechnungen. Eventuell: Gemeine Brüche im 5. und Dezimalbrüche im 6. Schuljahr.
6. Schuljahr: Die gemeinen Brüche (Vermeidung großer Brüche). Weitere Übungen im Berechnen des Zinses. Die übrigen Fragen der Zinsrechnung.
7. Schuljahr: Die Dezimalen als Brüche. Wiederholung und weitere Übung der schon gelernten Operationen. Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen durch Dezimalbrüche. Gewinn- und Verlustrechnung. Rabattrechnung.
8. Schuljahr: Wiederholung, Übung, eventuell Ergänzung der durchgenommenen Rechnungsarten. Einführung in die einfache Buchhaltung.

5. Lehrplan für die 8 klassigen Volksschulen mit deutscher Unterrichtssprache in Böhmen vom 9. Mai bzw. 9. Juni 1913.

IV. Rechnen, in Verbindung mit der geometrischen Formenlehre[1]).

Lehrziel: Sicherheit und Fertigkeit in der mündlichen und schriftlichen Lösung praktischer Rechenaufgaben aus dem häuslichen, bürgerlichen und wirtschaftlichen Leben. Einige Sicherheit

[1]) Auf die Wiedergabe der Lehraufgaben für Raumlehre (4.—8. Schuljahr) wurde hier verzichtet.

im Abschätzen, Messen und Berechnen der im wirklichen Leben häufiger vorkommenden Strecken, Flächen und Körper.

Stoffgebiete und Übungen: Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Dezimalzahlen sowie mit den gebräuchlichsten gemeinen Brüchen. Rechnen mit reinen Zahlen, mit benannten und mehrnamigen Zahlen. Mündliches Rechnen (Kopfrechnen) ist auf allen Stufen, besonders aber auf der Unter- und Mittelstufe zu üben. Das schriftliche Rechnen, auf der Unterstufe nur Gedächtnisstütze, tritt erst allmählich, so wie sich der Zahlenraum erweitert, in den Vordergrund. Das eigentliche Schlußrechnen (Dreisatz) tritt erst ein, wenn die Schüler im Rechnen mit reinen Zahlen einige Sicherheit gewonnen haben, also nicht vor dem 5. Schuljahre. Gründliche Einführung in unsere Währungsverhältnisse, Maße und Gewichte. — Die Übungsstoffe werden dem Erfahrungskreise der Schüler entnommen, also dem Schulleben, dem häuslichen und dem wirtschaftlichen Leben der Heimat. Einprägung der für dieses Leben wichtigen Zahlen. Auf der Oberstufe können im Bedarfsfalle die Grundzüge der einfachen Buchführung an praktischen Beispiele geübt werden. Die einschlägigen Drucksorten des Geschäftsverkehrs (Post-, Eisenbahn-, Steuerwesen) werden gelegentlich im Anschlusse an passende Rechenaufgaben in Verwendung gezogen. Die wichtigsten Grundbegriffe der geometrischen Formenlehre werden anschaulich, und wenn möglich, selbsttätig von den Schülern entwickelt. In gleicher Weise ist das Schätzen, Messen und Teilen von Strecken und Flächen zu üben.

1. Schuljahr: Zahlenraum von 1 bis 10. Zu- und Wegzählen, Vervielfachen und Messen. — Vorwiegend mündliches Rechnen. Schriftliche Darstellung der Zahlenzeichen (Ziffern) und der gewonnenen Rechensätze. — Anwendung der gewonnenen Zahlenreihen und der Rechnungsarten auf einfache, dem kindlichen Gedankenkreise angemessene Sachverhältnisse.

2. Schuljahr: Zahlenraum von 1 bis 100. Zu- und Wegzählen; leichtere Aufgaben des Vervielfachens, Messens und Teilens (ohne Rest). Einführung in das Einmaleins. Vorwiegend mündliches Rechnen. Die schriftlichen Darstellungen haben sich der Form nach den mündlichen anzuschließen. Vaterländische Münzen, Maße und Gewichte, soweit deren Gliederung auf der Hunderteilung beruht. — Anwendung der gewonnenen Zahlen und der Rechnungsarten auf einfache Sachgebiete des Familien- und des Schullebens.

3. Schuljahr: Zahlenraum von 1 bis 100. Das Einmaleins; sichere Beherrschung desselben ist zu erreichen. Die vier Grundrechnungsarten mit besonderer Berücksichtigung des Vervielfachens, Messens und Teilens. Erweiterung des Zahlenraumes bis 1000. Zu- und Wegzählen. Die schriftlichen Darstellungen haben sich der Form

nach den mündlichen anzuschließen. Münzen, Maße und Gewichte, soweit sie nicht aus dem Rahmen der Zahlenreihe treten. — Anwendung der Rechnungsarten auf entsprechende Sachgebiete der Heimat.

4. Schuljahr: Zahlenraum von 1 bis 1000. Vervielfachen, Messen und Teilen im Kopfe. Einführung in das schriftliche Rechnen. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen. Vorbereitung des Rechnens mit Dezimalen durch die dezimale Schreibung von Angaben in metrischen Längenmaße und Gewichte sowie von Wertangaben in Kronenwährung. Rechnen mit den Brüchen $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ und $^1/_{10}$ als Kopfrechnen, hauptsächlich im Anschlusse an Zähl- und Zeitmaße. Übertragung der vier Grundrechnungsarten auf angemessene Sachgebiete der engeren und weiteren Heimat.

5. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Dezimalzahlen im maßvoll erweiterten Zahlenraume, wie er den Bedürfnissen des praktischen Lebens entspricht. Rechnen mit mehrnamigen Zahlen, hauptsächlich mit jenen, die sich auf Dezimalen zurückführen lassen. Einfache Schlußrechnungen. Rechnen mit den einfachsten Brüchen ohne Anwendung von besonderen Regeln für das Bruchrechnen. Steigerung der Fertigkeit im Kopfrechnen. — Sachgebiete: Stoffe, entnommen den Lebens- und Erwerbsverhältnissen des Heimatlandes und den sachkundlichen Fächern (Natur- und Vaterlandskunde).

6. Schuljahr: Fortgesetzte Übung im Rechnen mit ganzen Zahlen und Dezimalzahlen unter allmählicher Erweiterung des Zahlengebietes. Rechnen mit mehrnamigen Zahlen, hauptsächlich mit jenen, deren Verwandlungszahl nicht 10, 100, 1000 usw. ist. Rechnen mit den gebräuchlichsten gemeinen Brüchen als Rechnen mit benannten Zahlen. Die gebräuchlichsten und zweckmäßigsten Rechenvorteile bei den vier Grundrechnungsarten. Schlußrechnungen. Einkaufs- und Verkaufsrechnungen. Einfache Prozent- und Zinsrechnungen. Steigerung der Fertigkeit im Kopfrechnen. — Sachgebiete: Haus- und Landwirtschaft. Wareneinkauf und Warenverkauf. Frachtenverkehr. Sparkasse. Passende Stoffe der sachunterrichtlichen Gegenstände (Naturkunde, Erdkunde und Geschichte).

7. und 8. Schuljahr: Verhältnisse und Proportionen. Angewandtes Rechnen: Anwendung der Schlußrechnung zur Lösung von häufig vorkommenden Aufgaben aus dem bürgerlichen und kaufmännischen Leben und dem Haushalte. Die wichtigsten ausländischen Währungen, Maße und Gewichte im Vergleiche mit den vaterländischen. Praktische Beispiele über Geldverkehr und Wohlfahrtsversicherungen. Die Grundzüge der einfachen Buchführung an praktischen Beispielen. An Mädchenschulen sind die Schülerinnen mit den einfachsten Voraussetzungen häuslicher Buchführung bekanntzumachen. Steigerung der Fertigkeit im Kopfrechnen. — Anwendung

des auf der vorhergehenden Stufe zum Abschluß gelangten schriftlichen Rechnens auf erweiterte Gebiete der Sachfächer (Naturkunde, Länder- und Völkerkunde) sowie des Gemeinde-, Verkehrs- und Staatslebens.

6. Lehrplan der siebenklassigen Volksschule in Hildesheim[1]).

1. Schuljahr: Addition und Subtraktion im Zahlenraume von 1 bis 20 als Hauptpensum. Außerdem: Leichte Aufgaben aus der Multiplikation und Division.

2. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten im Zahlenraum von 1 bis 100. Mark und Pfennige; Meter und Zentimeter; Schock, Dutzend und Stück; Zeitmaße: Jahr, Monat, Woche, Tag, Stunde, Minute. Das kleine Einmaleins. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich viermal eine kleine häusliche Aufgabe.

3. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten im Zahlenraum von 1 bis 1000. Einführung in das schriftliche Verfahren. Befestigung und Erweiterung des Einmaleins. Erlernung der gebräuchlichsten Währungszahlen: Mark — Pfennige, Hektoliter — Liter, Meter — Zentimeter, Kilometer — Meter, Kilogramm — Gramm. Die einfachsten Brüche. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich dreimal eine häusliche Arbeit.

4. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten im unbegrenzten Zahlenraum. Festlegung des schriftlichen Verfahrens und des Einmaleins. Die gebräuchlichsten Währungszahlen und ihre dezimale Schreibung. Aufgaben hierzu. Die einfachsten Brüche. Preisberechnungen. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich dreimal häusliche Aufgaben.

5. Schuljahr: Die Grundrechnungsarten mit mehrsortigen Zahlen dezimaler und nichtdezimaler Währung. Die Dezimalbruchrechnung (Hauptpensum). Zeitberechnung. Einfache Regeldetri. Münzen, Längen-, Flächen- und Hohlmaße, Gewichte und Papiermaße. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich dreimal häusliche Aufgaben und alle 14 Tage eine Arbeit zur Korrektur.

6. Schuljahr: Die Zeitrechnung. Die gemeinen Brüche (Hauptpensum). Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt. Die einfache Regeldetri und der Bruchsatz. Zins- und Prozentrechnung. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich dreimal häusliche Aufgaben und alle 14 Tage eine Arbeit zur Korrektur.

7. und 8. Schuljahr: Kurze Wiederholung der Bruchrechnung. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri-, Zins-, Zinseszins-, Prozent-, Rabatt- und Diskont-, Waren-, Verteilungs-, Termin- und

[1]) Aus „Lietzmann, Die Organisation des mathematischen Unterrichts an preußischen Volks- und Mittelschulen". IMUK-Schriften Band V, Heft 6, Leipzig 1914, Teubner.

Mischungsrechnung. Münz- und Wertpapierrechnung (beides kurz). Feuer-, Kapital- und Lebensversicherung (kurz). Kranken- und Unfall-, Invaliditäts- und Altersversicherung. Schriftliche Arbeiten: Wöchentlich zweimal häusliche Aufgaben und alle 14 Tage eine längere Arbeit zur Korrektur.

7. Lehrplan einer Bürgerschule zu Dresden[1]).

1. Schuljahr: Addition und Subtraktion 1—20, Multiplikation und Division 1—10, die Ziffern lernen.

2. Schuljahr: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division 1—100, 1×1 bis 5, Rechenaufgaben.

3. Schuljahr: Das kleine 1×1 vollständig; Addition und Subtraktion 1—1000. Einübung schriftlicher Lösungsformen.

4. Schuljahr: Multiplikation und Division 1—1000; im zweiten Halbjahre Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division 1 bis 100 000; die Kinder sind in den unendlichen Zahlenraum einzuführen.

5. Schuljahr: Münzen, Maße, Gewichte, Dezimalzahlen, benannte und mehrfach benannte Zahlen; Dezimalmaße.

6. Schuljahr: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit Dezimalzahlen und mit Brüchen; das Gleichnamigmachen; leichteste Fälle der Schlußrechnung, Rabattrechnung und Zinsrechnung.

7. Schuljahr: Schlußrechnung, Preisberechnung, Zinsrechnung, Rabattrechnung.

8. Schuljahr: Prozentrechnung in ihrer Anwendung auf Rabatt-, Diskont- und Zinsrechnung. Zusammengesetzte Schlußrechnung. Verteilungsrechnung, Kursberechnung, Verwandlung von deutschen Geldsorten in solche andrer Staaten.

8. Städtische achtklassige Schulen des Fürstentums Schwarzburg-Sondershausen[2]).

1. Schuljahr: Der Zahlenraum 1—5, Zerlegen, Zu- und Abzählen und Vergleichen jeder Grundzahl; Erweiterung des Zahlenraums bis 20; Zu- und Abzählen von 1 bis 9.

2. Schuljahr: Vervielfachen, Enthaltensein und Teilen innerhalb des Zahlenraums bis 20. Zu- und Abzählen innerhalb des Zahlenraums bis 100.

3. Schuljahr: Das kleine 1×1, Enthaltensein und Teilen im Zahlenraume 1—1000; der Zahlenraum 1—1000 mit allen vier Grundrechnungsarten; Einführung in die Bruchform.

[1]) Aus: Dreßler und Körner, Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen, Thüringen und Anhalt. Band V, Heft 4 der IMUK-Schriften. Leipzig 1914, Teubner.

[2]) ebenda.

4. Schuljahr: Der unbegrenzte Zahlenraum mit unbenannten und benannten Zahlen.
5. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen und mit Dezimalbrüchen. Einfache Regeldetri.
6. Schuljahr: Die gemeinen Brüche in den vier Grundrechnungsarten; Verwandlung gemeiner und Dezimalbrüche; Zeitrechnung; Regeldetri mit gemeinen Brüchen; Prozentrechnung (ohne Diskont), Zinsrechnung (die Zinsen werden gesucht).
7. Schuljahr: Prozentrechnung mit Diskont; Zinsrechnung (Zinsfuß und Kapital werden gesucht); Gewinn- und Verlustrechnung; Rabatt- und Gesellschaftsrechnung.
8. Schuljahr: Mischungsrechnung, Versicherungswesen, Wertpapiere.

9. Knabenmittelschule Gera-Reuß.

1. Schuljahr: Zahlenraum 1—20.
2. Schuljahr: Zahlenraum 1—100; das kleine Einmaleins ist bis zur Schlagfertigkeit zu üben.
3. Schuljahr: Zahlenraum 1—1000; Zahlenraum 1—1 000 000.
4. Schuljahr: Unbegrenzter Zahlenraum; Resolvieren und Reduzieren mit nichtdezimalen Währungen, mit dezimalen Währungen; vier Spezies mit mehrfach benannten Zahlen, einfache Regeldetri mit geraden Verhältnissen.
5. Schuljahr: Dezimalbrüche, gemeine Brüche; einfache Regeldetri mit geraden und umgekehrten Verhältnissen.
6. Schuljahr: Gemeine Brüche, Dezimalbrüche; Durchschnittsberechnungen, Zeitrechnung (Stoff sehr zu beschränken), Prozent- und Zinsrechnung; Arbeiterversicherungen.
7. Schuljahr: Verwandeln gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt; einfache und zusammengesetzte Regeldetri (Eisenbahntarifpreise, Verhältnisbestimmungen); Prozentrechnung im allgemeinen, Anwendung bei Gewinn und Verlust, Tara und Gutgewicht; Zinsrechnung, Rabatt- und Diskontrechnung. Die vier Spezies mit Buchstabengrößen, die Bruchrechnung mit Buchstabengrößen; Rechnen mit algebraischen Zahlen; Rechnen mit Klammergrößen; Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten.
8. Schuljahr: Gesellschafts- und Mischungsrechnung; Wiederholung: Teilbarkeit der Zahlen; die deutsche Münzordnung; die wichtigsten ausländischen Münzen; Wechselrechnung; Wertpapiere in engerem Sinne und Kursrechnung. Gleichungen 1. Grades mit einer, zwei und drei Unbekannten; Proportionen, Potenzen, Wurzeln, Gleichungen 2. Grades.
9. Schuljahr: Wiederholung der bürgerlichen Rechnungsarten unter Berücksichtigung des kaufmännischen Rechnens; Prozentrech-

nung, Zinsrechnung, Diskontrechnung, Effektenrechnung, Wechselrechnung, Kontokorrenten. Erweiterung des Rechnens mit Potenzen und Wurzeln; Logarithmen; Gleichungen 2. Grades mit einer und zwei Unbekannten; arithmetische Reihen, geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung.

(Aus Dreßler und Körner.)

10. Grundlehrplan für die Schulen Groß-Berlins vom 8. Dez. 1913.

IV. Rechnen.

Ziel: Schulung der Zahlauffassung. Befähigung, Verhältnisse des täglichen Lebens zahlenmäßig zu erfassen und daraus sich ergebende Aufgaben selbständig und sicher zu lösen.

1. Schuljahr: Zahlenreihe 1 bis 20; Zuzählen, Abziehen (mit Überschreiten der 10), Malnehmen.

2. Schuljahr: Zahlenreihe 1 bis 100. (Messen und Teilen mit Rest nur innerhalb des kleinen Einmaleins.)

3. Schuljahr: Zahlenreihe 1 bis 1000. Einmaleins mit 12, 15, 24, 25. (Multiplikator und Divisor sind einstellig oder die Zahlen 12, 15, 24, 25.)

4. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten in maßvoll zu erweiternder Zahlenreihe.

5. Schuljahr: Die vier Grundrechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen in zehnteiliger und anderer Währung.

6. Schuljahr: Bruchrechnung. Schlußrechnung.

7. Schuljahr: Prozentbegriff in den bürgerlichen Rechnungsarten. Versicherungsrechnung.

8. Schuljahr: Verhältnisbegriff in den bürgerlichen Rechnungsarten. Haushalt der Familie, der Gemeinde und des Staates. Geldmarkt.

Erläuterungen und methodische Bemerkungen.

1. Auf allen Stufen sind die Kinder so weit zu bringen, daß sie die Rechenaufgaben selbständig lösen, ohne daß der Lehrer leitet und einhilft; dabei ist ein gedankenloses Rechnen nach Regeln zu vermeiden.

2. Die Entwicklung eines neuen Verfahrens darf die Zeit für die Übung und Anwendung nicht über Gebühr verkürzen.

3. Zur Erzielung der Rechenfertigkeit sind am Anfang jeder Stunde regelmäßig Wiederholungsübungen vorzunehmen, die nach und nach den Stoff aller früheren Klassen durchlaufen. Bei diesen „täglichen Übungen“, aber auch sonst im Unterricht sollen die Kinder gewöhnt werden, selber Aufgaben zu stellen und Rechenvorteile auszunutzen.

4. Die vollständige Durcharbeitung aller Aufgaben der eingeführten Rechenhefte wird nicht verlangt.

5. Über einen dreistelligen Multiplikator und Divisor darf in der Regel nicht hinausgegangen werden. Brüche mit großen Zahlen sind zu vermeiden.

6. Im Sachrechnen sollen die Aufgaben auf allen Stufen wirkliche, nicht ausgeklügelte oder im Leben selten vorkommende Verhältnisse behandeln; die örtlichen Verhältnisse sind hierbei ganz besonders zu beachten.

7. Die Kinder sollen angeregt werden, das heimische wirtschaftliche Leben selbst zu beobachten, Erkundigungen einzuziehen und auf Grund des Erfahrenen Berechnungen anzustellen.

8. Im Anschluß an wirtschaftliche Belehrungen sind auch Rechnungen, Quittungen, Schuldscheine, Postanweisungen usw. zu schreiben und rechnerisch zu verwerten.

9. Vom Rechenstoff und Rechenverfahren ist das auszuschließen, was lediglich späterer Fachbildung (kaufmännischer und gewerblicher Art) angehört und darum für das Kind noch lebensfremd ist.

10. Die Bruchrechnung ist auf den unteren Stufen in geeigneter Weise vorzubereiten.

Diesen Lehrplänen, welche ausgewählt wurden, um einerseits die große Gleichartigkeit der Unterziele, andrerseits das Streben nach dem Praktischen, dem Lebensfähigen, und seine fortschreitende Verwirklichung zu zeigen, sollen sich noch einige Ausführungen über das Lehrverfahren anschließen, wie es gegenwärtig als vorbildlich erscheint. Die ausgewählten Lehrproben sollen das erläutern. Auch hier konnten nur typische Stoffe und bewährte Vertreter in Betracht kommen[1]).

§ 4. Lehrverfahren der Gegenwart.

1.

§ 55. Das Lehrverfahren.[2])

Die Behandlung des Rechenstoffes erfordert drei Hauptlehrtätigkeiten:

a) Anschauliche Einführung in das Verständnis. „Das Rechnen ist auf allen Stufen als Übung im klaren Denken und richtigen Sprechen zu betreiben."

b) Übung bis zur Geläufigkeit. „Der letzte Zweck ist stets die Be-

[1]) Womit nicht gesagt sein soll, daß nur die aufgeführten bewährte Vertreter seien. Es gibt noch eine große Zahl vorzüglicher Methodiker des Rechenunterrichts.

[2]) Schumann und Voigt, Lehrbuch der Pädagogik. III. Teil: Spezielle Methodik und Schulkunde. 11. Aufl. Hannover 1904. S. 386 und 387.

fähigung der Schüler zu selbständiger, sicherer und schneller Lösung."

c) Anwendung auf das praktische Leben. „Bei der praktischen Anleitung ist überall die Beziehung auf das bürgerliche Leben ins Auge zu fassen."

Die Wege, auf denen man diese drei Lehrtätigkeiten zur Geltung bringt, weichen im einzelnen voneinander ab; jeder führt zum Ziele, wenn ein geschickter Lehrer ihn geht.

Die zweckdienlichste Lehrform ist diejenige, die die Selbstätigkeit der Schüler am meisten in Anspruch nimmt. Dazu aber ist die Befolgung der Formalstufen in hervorragendem Maße geeignet. Nach diesen vollzieht sich die Unterrichtsarbeit in jeder „methodischen Einheit" in folgenden fünf Stufen.

1. Die Vorbereitung. Durch sie müssen diejenigen Stoffe herbeigeschafft werden, die dem Verstehen des darzubietenden Neuen den Boden bereiten. Das geschieht einmal durch Wiederholung früher geübter Rechenstoffe — seien es Rechenoperationen, seien es Rechenregeln und Gesetze oder Wort- und Sacherklärungen — zum andern aber auch in der anschaulichen Erörterung der zu berechnenden und bis dahin unbekannten sachlichen Verhältnisse.

Die Vorbereitung sei kurz und knapp, enthalte nichts Nebensächliches und vermeide alles, was die Teilnahme ablenkt. Auf die Vorbereitung folgt die Zielangabe, falls dies nicht schon bei Beginn der Behandlung geschehen ist. Zuweilen kann die Angabe des Zieles auch ganz wegfallen.

2. Die Darbietung des neuen Stoffes gestaltet sich auf den verschiedenen Stufen verschieden. Auf der Unterstufe geht der Unterricht von bestimmten Dingen aus und veranschaulicht die Rechenoperationen an der Rechenmaschine oder mit Hilfe anderer Veranschaulichungsmittel. Auf der Mittel- und Oberstufe handelt es sich für die Darbietung in jedem Falle um die Lösung einer Aufgabe. Der Lehrer stellt dieselbe sofort und entwickelt darauf die Lösung unter Beteiligung aller Schüler, die somit den Gang der Lösung selbst finden und sich der Gründe des Verfahrens bewußt werden müssen. Hieran schließt sich die zusammenhängende Lösung durch einen Schüler. Dabei unterbreche man ihn nicht, außer bei groben sprachlichen Verstößen, mag die Darstellung auch noch soviel zu wünschen übrig lassen, sondern verbessere das Gesagte erst am Ende. Durch Stellen zusammenfassender Hauptfragen wird eine kurze Lösungsform festgestellt und den Schülern angeeignet.

3. Auf der Stufe der Vergleichung werden noch mehrere Aufgaben derselben Art gelöst, wobei das Neue mit dem früher Gelernten eine mannigfache Verbindung erfährt.

4. Wie bei jedem andern Unterricht, so sind im weiteren Verlaufe auch hier allgemeine Regeln und Gesetze abzuleiten. Diese werden auf der Stufe der **Zusammenfassung** aus den betrachteten Einzelfällen scharf herausgehoben und sprachlich geformt. Auch kann die Zusammenfassung sich erstrecken auf die zusammenhängende Wiedergabe dessen, was im Anschluß an die Sachgebiete, die Zinsrechnung, Rabattrechnung, Arbeiterversicherung u. dgl. m. gelehrt worden ist.

Da das auch im Rechenunterricht erlangte Wissen und Können erst Wert hat, wenn es nicht toter Besitz bleibt, so ist

5. die **Anwendung** des Wissens mit aller Sorgfalt zu pflegen. Dies erfordert, daß seitens der Schüler Aufgaben mit benannten und unbenannten Zahlen, sowie vor allen Dingen Aufgaben, die den Bedürfnissen des praktischen Lebens angepaßt sind, auch unter Anwendung von Rechenvorteilen bis zur vollen Sicherheit und Beherrschung des Stoffes gelöst werden.

2.

XXVI. Die Durcharbeitung des Stoffes.[1])

Der naturgemäße Weg für die Durcharbeitung auch des Rechenstoffes wird durch die **formalen Stufen** bezeichnet. Unterscheide man deren drei wie Dörpfeld (Anschauen, Denken, Anwenden), vier wie Herbart (Klarheit, Assoziation, System und Methode) oder fünf wie Ziller und Rein (Analyse oder Vorbereitung, Synthese oder Darbietung, Assoziation oder Verknüpfung, System oder Zusammenfassung, Methode oder Anwendung), dabei erscheinen die einzelnen Seelentätigkeiten nur mehr oder weniger gegliedert; sachlich bezeichnen die Stufen immer dieselben Vorgänge.

Zunächst muß der auf die einzelnen Klassen oder Abteilungen verteilte Rechenstoff in **methodische Einheiten** zerlegt werden. Diese sind in der Zahlreihe 1—10 die einzelnen Zahlen, weiterhin Zahlreihen, Operationen usw.

Das **Ziel** für die methodische Einheit soll dieselbe einleiten und soviel als möglich umspannen. Es soll das Denken und die Erwartung der Schüler in hohem Maße anregen. Am besten tritt das Ziel als zu lösendes Problem, als sachliche, möglichst konkrete und individuell gehaltene Aufgabe auf. Ein solches Ziel wäre z. B.: Wieviel Tage dauern unsere (vierwöchigen) Sommerferien?

Die **Vorbereitung** schließt sich an das Ziel an. Sie erstreckt sich auf die sachlichen und rechnerischen Schwierigkeiten, die in der Zielaufgabe liegen, um das leichte Vonstattengehen der Lösung zu

[1]) Rude, Methodik des gesamten Volksschulunterrichts. II. Teil. 7. Aufl. Osterwieck 1910. S. 367—69.

ermöglichen. Was die Schüler bereits wissen, wird ins Bewußtsein gerufen. Vermutungen, auf welche Weise die Aufgabe gelöst werden könnte, werden angestellt. Die Vorbereitung muß kurz und knapp gehalten werden.

Die Darbietungsstufe hat die Aufgabe, die Schüler zum klaren Verständnis des Normalverfahrens zu bringen. Sie müssen den Gang desselben in allen Teilen völlig begreifen lernen. Verfehlt wäre es, wenn der Lehrer die Lösung vorrechnete und die Schüler dieselbe nachsprechen ließe. Das wäre ein geistloses Abrichten. Vielmehr sollen die Schüler den Gang der Lösung möglichst selbsttätig finden; der Lehrer darf ihnen nötigenfalls nur Fingerzeige dafür geben. Zum klaren Verständnis gehört eine klare und deutliche Anschauung. Dieselbe ist für das Rechnen von 1—100 von größter Wichtigkeit und unentbehrlich. Auch für die Zahlreihe 1 bis 1000 ist bei schwach befähigten Schülern die Veranschaulichung noch sehr wünschenswert. Die Einführung in die Bruchrechnung muß unbedingt durch Veranschaulichung bewirkt werden.

Die Verknüpfung leitet den Abstraktionsprozeß ein. Die Aufgabe desselben ist es, aus dem bisher erarbeiteten Stoffe das Allgemeingültige herauszuheben. Die dritte Formalstufe kann es mit zwei Tätigkeiten zu tun haben: mit der Vergleichung oder der Verknüpfung. Wenn ein Begriff oder Gesetz abgeleitet werden soll, dann werden Vergleichungen angestellt. Das Alte, Bekannte wird mit dem neu Erarbeiteten, das letztere untereinander verglichen. Zu dem Neuen der Darbietungsstufe darf aber weiteres im Wesen Neues nicht hinzutreten. Die 3. Formalstufe darf wohl der Form, aber nicht dem Inhalt nach Neues bringen. Die Vergleichung gestaltet sich je nach dem Stoffe verschieden. Bei der Siebenerreihe kann man die volle Woche mit der Arbeitswoche vergleichen. Vergleiche 4 volle Wochen mit 4 Arbeitswochen! Dabei wird die Siebener- mit der Sechserreihe verglichen. — Die Tausenderreihe wird mit der Hunderterreihe verglichen: 830—40, 83—4. Zuweilen ist die Vergleichung vieler Rechenfälle notwendig; das Unwesentliche wird abgestreift, das Wesentliche herausgestellt. In anderen Fällen kann auch schon aus einem oder wenigen Beispielen die Regel, das Gesetz durch reifes Denken gewonnen werden; weitere Einzelfälle werden dann zur Klärung, zum gründlicheren Verständnis des Begrifflichen herangezogen. Die Geistestätigkeit ist hierbei eine unterordnende (subsumierende).

In manchen Fällen handelt es sich nicht um die Gewinnung von Begrifflichem, sondern nur um eine Erweiterung des Systems, wenn z. B. zu den vorhandenen Reihen des Einmaleins eine neue Reihe hinzugefügt wird. Dann haben wir es mit einer Verknüpfung im eigentlichen Wortsinn zu tun.

Die Stufe der Zusammenfassung bildet den Abschluß der vorigen Stufe. Das Ergebnis der Abstraktion findet hier seinen sprachlichen Ausdruck als Regel oder Musterbeispiel. Doch darf das Rechnen nicht in ein Regelwerk ausarten; vielmehr muß der Lehrer sich auf die Entwicklung notwendiger und wichtiger Regeln beschränken. Auch sollen dieselben einfach und elementar gefaßt werden, z. B.: Man vervielfacht eine Zahl mit Zehn, indem man eine Null anhängt. Statt der Regel kann auch ein typisches Beispiel in ein Systemheft eingetragen werden, z. B.: 37 + 24 = 37 + 20 + 4.

Die Stufe der Anwendung hat den Zweck, das Wissen in ein Können überzuführen. Dazu gehört Übung und Anwendung auf das praktische Leben, namentlich auf das Sachgebiet. Die Übung hat es vorwiegend mit unbenannten und benannten Zahlen zu tun. Die Anwendung geschieht nach der Natur der Sache in angewandten Aufgaben. Das Rechenheft bietet solche Aufgaben in Fülle. Bei der Ausrechnung beschränkt der Lehrer seine Schüler nicht nur auf das Normalverfahren; vielmehr können sie auch leichtere und kürzere Wege einschlagen. Ja der Lehrer weist selbst auf praktische Rechenvorteile hin und übt deren Gebrauch. Auf der Stufe der Anwendung sind auch algebraische Aufgaben mit Vorteil zu verwerten. Sie bringen die üblichen Aufgaben in eine andere, eine Rätselform. Auch das Proberechnen im Kopfe und in schriftlicher Darstellung gehört auf die Stufe der Anwendung.

3.

1. Stufe. § 3. Zählen und Zuzählen der 1 und 2 in der Zahlenreihe bis 5.[1])

Zählen.

1. Der Lehrer schiebt auf einem Drahte nach und nach 5 Kugeln vor und lehrt die Kinder zählen, ohne daß sie die Benennung „Kugeln" aussprechen. Sie zählen also, dem Vorschieben folgend: „1" .. „2" .. „3" .. „4" .. „5". Dieses Zählen übt man jetzt ohne Veranschaulichung einzeln und im Chore und leitet die Übung durch Taktieren mit der rechten Hand oder mit dem Zeigestock. Auch die Kinder mögen anfangs bei jeder Zahl einen Niederschlag mit der erhobenen rechten Hand auf den Rücken der linken Hand ausführen, welche wagerecht gehalten wird.

2. „Nach 1 kommt 2, nach 2 kommt 3," bis 5. Erst mit Veranschaulichung am Kugelapparate, dann ohne Veranschaulichung. Fragen außer der Reihe: Was kommt nach 3? nach 1? nach 4? Stockt ein Kind, so greift man zur Veranschaulichung zurück.

[1]) Büttner, Anleitung für den Rechen- und Raumlehreunterricht. 23. Aufl., bearb. von Maertens und Schreiber. Leipzig 1913. S. 78 und 79.

3. Zählt von 1 bis 4! von 3 bis 5! von 2 bis 4! von 1 bis 3!

4. Prüfung! Zeigt 3 Finger (an einer Hand)! 1 F.! 5 F.! 2 F.! 4 F.! Schiebt an der Maschine drei Kugeln vor! 5 K.! 2 K.! 4 K.! 1 K.! Wer will an der Wandtafel 3 Striche (Dächer) malen?

5. Zeigt an der linken Hand 2 Finger, an der rechten 1 F.! Zeigt 3 F. und 1 F.! 4 F. und 1 F.! 1 F. und 1 F.!

Zuzählen.

1. Man zeigt 1 F. und 1 F. und bringt dann die beiden F. dicht zusammen. Die Kinder sprechen, dem Vorzeigen folgend: „1 F. und 1 F. sind 2 F.“ An der Rechenmaschine schiebt man 1 Kugel und dann noch 1 K. vor, und die Kinder sprechen: „1 + 1 ist 2.“ (Also ohne Benennung!)

Das Zuzählen der 1 zu 2 nimmt denselben Gang. An den Fingern lesen die Kinder den Satz ab: „2 F. + 1 F. = 3 F.“ Dann schiebt man an der Rechenmaschine 2 Kugeln vor, und indem man noch eine dritte hinzufügt, sprechen die Kinder: 2 + 1 ist 3. (Also ohne Benennung!)

Ganz in derselben Weise führen wir die Kinder zu den Sätzen: 3 + 1 = 4; 4 + 1 = 5. Jetzt folgt die Übung ohne Veranschaulichung: 1 + 1 ist 2, 2 + 1 ist 3, 3 + 1 ist 4, 4 + 1 = 5, in der Reihe, außer der Reihe. Stockt ein Kind, z. B. bei der Aufgabe: Wieviel ist 3 + 1? so geht man auf die Veranschaulichung zurück; am besten bewirkt sie das Kind selbst, indem es 3 Finger und 1 F. zeigt. Meist genügt es auch schon, wenn man 3 Finger an einer Hand zeigen läßt.

Wir haben jetzt drei Arten des Zählens, die öfter geübt werden: 1. „Eins, zwei, drei, vier, fünf.“ 2. „Nach 1 kommt 2, nach 2 kommt 3“ usw. 3. zählen wir: „1 + 1 ist 2, 2 + 1 = 3“ usw.

2. Wie beim Zuzählen der 1, so üben wir das Zuzählen der 2 erst anschaulich mit Benennung, dann anschaulich ohne Benennung und zuletzt ohne Veranschaulichung. Als Vorbereitung läßt man die beiden Posten an den Fingern herstellen. Zeigt an der linken Hand 1 Finger, an der rechten 2! An jeder Hand 2 F.! An der linken Hand 3, an der rechten 2 F.! Die Summen werden durch Zählen gefunden: 1 F. + 1 F.? 1 F. + 2 F.? Am Kugelapparate schiebt man eine K. vor, und indem man 2 K. hinzufügt, sprechen die Kinder: 1 + 2 = 3. 2 F. + 1 F.? 2 F. + 2 F.? Nachher ohne Benennung: 2 + 2 = 4. Zuletzt übt man die 7 Aufgaben des Zuzählens in buntem Wechsel mit und ohne Benennung.

3. Die schriftliche Beschäftigung dient hier nicht dem Zusammenzählen. Das wird nur mündlich geübt. Bei der Einübung der zur Einprägung kommenden Sätze stellt der Lehrer die Aufgaben an der Maschine oder mittels seiner Finger dar, meist ohne ein

Wort zu sprechen. Schriftlich werden nur die Aufgaben so hingestellt: | + |, ||| + |, || + || usw. Dieselbe Darstellung mit Dächern. Das stehende Kreuz ist bereits geübt. Man sagt den Kindern: Es wird „und" gelesen.

4. Anwendung. Ein Kind hat 2 Arme (Ohren, Augen); wieviel Arme haben 2 Kinder? Du hast 2 Griffel und bekommst noch einen geschenkt. Ein Kind hat vom Vater 3 Äpfel, von der Mutter 1 Apfel geschenkt erhalten; wieviel Äpfel hat es jetzt? Zeige 2 Finger! Der Nachbar zeige 1 F. (2 F.)! Wieviel Finger zeigt ihr beide? An einem Wagen ziehen 4 Pferde, 1 kleines Pferd läuft nebenher. Vormittags 3 Stunden Schule, nachmittags 1 Stunde. Hühner, Tauben, Sperlinge auf dem Hofe. 2 lange Seiten der Tafel, 2 kurze. — Es macht den Kindern Freude, wenn sie selbst Aufgaben stellen. Wieviel Fenster hat unsere Schulstube?

Schlußbemerkungen. Wir üben nur das Zuzählen mit 1 und 2, nicht mit 3 und 4, weil wir die Kinder erst in leichteren Übungen sicher machen wollen. Eine Erschöpfung des Stoffes ist durch nichts geboten. Wir wollen flotte Rechner haben, wollen die Freude an der Arbeit nicht dadurch trüben, daß sie den Kindern zu schwer wird. Was wir jetzt übergehen, werden die Kinder nach kurzer Zeit mit Leichtigkeit lernen.

4.

2. Stufe. § 4. Zuzählen mit Überschreiten der 10.[1]

1. Vorbereitung.

a) Wiederholung: Ergänzung jeder Grundzahl zu 10 und Zerlegung jeder Grundzahl in zwei beliebige Posten.

b) Vorübungen in dreigliedrigen Aufgaben: 9 + 1 + 1, 8 + 2 + 3, 7 + 3 + 5, 6 + 4 + 2, 5 + 5 + 2 usw.

2. Die Reihenfolge der Aufgaben ist am besten folgende: a) Zuerst legen wir zu 9 die Zahlen 2, 4, 6, 9. b) Zu 5 legen wir die Zahlen 6, 8, 9. c) Zu 8 werden die Zahlen 4, 8 addiert usw. Man nehme also beim Beginn dieser Übungen nicht sogleich alle möglichen Aufgaben durch. Aber man lasse eine Aufgabe mehrmals rechnen, auch bald wiederholen.

3. Allgemeine Bemerkungen. Die Zahl von 36 Aufgaben verringert sich durch die Umkehrungen bereits geübter auf 20. So tritt 9 und 2 später als 2 und 9, 9 und 3 als 3 und 9 auf. Deshalb muß der Schüler ganz sicher darin werden, daß die Reihenfolge der Summanden für das Ergebnis ohne Bedeutung ist. Wir üben das in den leichten Aufgaben, bei denen der eine Posten 10 ist. Was ist mehr: „10 und 2" oder „2 und 10"? „10 + 2 ist 12; 2 + 10

[1] ebenda S. 93—95.

ist 12." 10 + 5? 5 + 10? Die Zahlen, die man zusammenzählen soll, vertauscht man gern, wenn die erste Zahl kleiner ist als die zweite. Statt 2 + 6 rechnet man lieber 6 + 2.

Es erleichtert die Einprägung, wenn man die Aufgaben mit zwei gleichen Posten an der betreffenden Stelle sofort sicher einübt, wobei man die Multiplikationsform zu Hilfe nimmt. 9 und 9 oder 2 × 9 ist 18. 8 und 8 oder 2 × 8. Die Schüler erkennen leicht, daß 2 × 6 nur ein anderer Ausdruck für 6 + 6 ist. An diese Aufgaben, die sich am leichtesten einprägen, schließt man dann die nebenliegenden bei der Einübung an. Bei 9 und 8 erinnert man an 8 und 8, bei 7 und 8 (8 und 7) an 7 und 7 usw.

4. Die Entwicklung des Normalverfahrens zeigen wir an der Aufgabe 9 + 3. An der Maschine wird die Aufgabe auf 2 Drähten so hingestellt, wie die folgende Punktfigur es zeigt.

Auf dem zweiten Drahte stehen 9 Kugeln in einer Gruppe; in einiger Entfernung steht die eine Kugel, die am vollen Zehner fehlt. Über dieser einen K. befinden sich auf dem obersten Drahte 2 Kugeln. Soll später die Aufgabe 9 + 4 hingestellt werden, so bleibt der zweite Draht unverändert; statt der 2 K. oben schiebt man deren 3 an. Die Kinder bilden sich die Aufgabe bald selbst. Man zeigt auf die 9 K., und die Kinder sprechen: „neun"; zeigt man dann auf die 3 K. rechts, so sagen sie: „und drei". Wieviel fehlt bei 9 an 10? Wir nehmen die 1 von 3 ab. Wieviel bleibt? Wieviel müssen wir also noch zu 10 hinzutun? Man schiebt jetzt die 1 K. an die 9 heran und fragt: Wieviel ist 9 + 1? Wieviel hast du jetzt zur 9 hinzugelegt? Wieviel sollst du aber zuzählen? Wieviel mußt du noch hinzutun? (Man zeigt auf die 2 K.) „Zu 10 müssen wir noch 2 hinzulegen." Wieviel ist 10 + 2? Wieviel ist 9 + 3?

Nachdem einige Beispiele in dieser entwickelnden Form der Lösung durchgearbeitet worden sind, geht man zur selbständigen Lösung seitens der Schüler. Hierbei ist die kürzeste Form die beste. Die Lösung geht demnach so: 9 + 3! „9 + 1 ist 10, 10 + 2 ist 12; 9 + 3 ist 12." Das Ergebnis muß schließlich ohne die Brücke der Berechnung angegeben werden können; die Aufgaben sind bis zur Schlagfertigkeit zu üben. (Vergleiche die methodischen Winke beim Zusammenzählen in der Zahlenreihe 1 bis 100!)

5. Reihenbildungen. a) 1 + 2 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 2 = 7, bis 19. b) 2 + 2 = 4, 4 + 2, bis 20. c) 1 + 3 = 4, 4 + 3, bis 19. d) 3 + 3 = 6, 6 + 3, bis 18. e) 1 + 4 = 5, 5 + 4, bis 17. f) 4 + 4 = 8, 8 + 4, bis 20. g) 5 + 5 = 10, 10 + 5, bis 20. Die Reihen, welche das Einmaleins vorbereiten, sind besonders aufs Korn zu nehmen.

6. **Anwendung.** 1 Dutzend hat 12 Stück. Wieviel Stück sind 1 Dtzd. und 1, 2, 3 bis 8 Stück? 1 Mdl. hat 15 Stck. Wieviel Stck. sind 1 Mdl. und 1, 2, 3, 4, 5 Stück? Auf jeder Bank sitzen 6 (7, 8) Schüler, wieviel auf 2 Bänken? Ungleiche Zahlen. In einer Abteilung sind 9 Kinder, in der andern 8. Neu eingetreten sind 8 Knaben und 9 Mädchen. Ein Knabe kauft einen Bleistift für 8 ₰ und ein Schreibheft für 9 (12) ₰. Auf einer Seite der Tafel zieht ein Knabe 6 Linien, auf der andern 8 (7). In einer Reihe stehen 4 Knaben; wieviel in 2, 3, 4, 5 Reihen? Wieviel ₰ sind 2 Fünfer und 6 ₰? 1 Zehner, 1 Fünfer und 1 Zweipfennigstück? Auf einer Seite einer Straße stehen 12 Häuser, auf der andern 7 (8, 6 Häuser). 1 Brötchen kostet 5 ₰ und 1 Hering 8 ₰. 1 Woche hat 7 Tage; wieviel Tage haben 2 Wochen?

5.

4. Stufe. § 5. Teilen und Enthaltensein in der Zahlenreihe bis 1000.[1])

A. Das Kopfrechnen.

I. Übersicht des Stoffes.

1. Das Einsineins der Zehner: a) Teilen und b) Enthaltensein. (a) 120:6; b) 6 in 120.)

2. Teilen aller Zahlen innerhalb des Einmaleins der Zehner durch die Grundzahlen a) ohne Rest und b) mit Rest. (a) 78:2; b) 179:2.)

3. Teilen durch 12, 15, 24 und 25 wie durch einstellige Teiler.

4. Leichte Aufgaben, in denen reine Hunderter- und gemischte Hunderterzahlen durch Grundzahlen dividiert werden. (900:3; 360:3.)

5. Teilen durch 10, 20, 30 usw. (420:10; 760:40.)

II. Methodisches.

Zu 1. Wir gehen die Reihen mit den Teilern 2, 3, 4 bis 9 durch. Grundlage für das Verständnis der Arbeit ist das Vervielfachen der Zehner. Teilen wir durch 2, so wird zuerst die Reihe $2 \cdot 20$, $2 \cdot 30$ bis $2 \cdot 100$ wiederholt. Bei dem Teiler 3 vervielfachen wir zunächst 10, 20, 30 bis 100 mit 3.

Die Vermittlung des Neuen geschieht durch die Zerlegung der Ergebnisse in die Einmaleinszahlen. $2 \cdot 30$ ist 60; 60 ist $2 \cdot 30$ oder $30 \cdot 2$. Daran schließen sich die Aufgaben: a) $60:2 = 30$; denn $2 \cdot 30 = 60$. b) 2 in $60 = 30 \times$; denn $30 \times 2 = 60$. Haben wir eine Reihe von Aufgaben so durchgearbeitet, dann zeigen wir dem Schüler

[1]) ebenda S. 126—29.

den Zusammenhang mit den Grundaufgaben. Wir stellen einige Aufgaben nebeneinander.

6 : 3 = 2	60 : 3 = 20	3 in 6 = 2 ×	3 in 60 = 20 ×
9 : 3 = 3	90 : 3 = 30	3 in 9 = 3 ×	3 in 90 = 30 ×
21 : 3 = 7	210 : 3 = 70	3 in 21 = 7 ×	3 in 210 = 70 ×

In der ersten Reihe teilen wir 6, 9 usw., in der zweiten Reihe 10×6, 10×9; folglich muß auch der Teil 10× so groß sein. Beim Teilen wechseln wir im Ausdruck: 60 geteilt durch 3; ⅓ von 90; der 3. Teil von 210.

Die Begründung der Lösung im Sinne des Teilens oder Enthaltenseins durch das Einmaleins erscheint in reinen Zahlen nicht immer notwendig, wohl aber bei benannten Zahlen und angewandten Aufgaben.

A n w e n d u n g. a) T e i l e n. Auf beiden Seiten einer Straße stehen 60 (180) Bäume, wieviel auf jeder Seite? In drei Monaten verdient A. 180 (210) *M*. Von 120 Fischen wird der 6. Teil verkauft; die andern tut man in den Fischkasten. Eine Kiste mit Ware wiegt 320 kg; die Kiste allein wiegt den 8. Teil des Gewichtes, wieviel die Ware? 9 Knaben teilen 6 Schock Nüsse. b) E n t h a l t e n s e i n. Wieviel Reihen bilden 80 (120) Soldaten, wenn in einer Reihe 4 stehen? Wieviel Wochen sind 70 (350) Tage? Ein Knabe holt Fünfpfennigmarken; wieviel Stück erhält er für 1 *M*? In einer Klasse sitzen 60 Schüler auf Bänken zu je 4. Wieviel Bänke stehen in der Klasse? Wieviel Blätter hat ein Buch mit 160 Seiten?

Zu 2. T e i l e n z w e i - u n d d r e i s t e l l i g e r Z a h l e n i n n e r h a l b d e s E i n m a l e i n s d e r Z e h n e r d u r c h d i e G r u n d z a h l e n. Die Lösung verlangt Sicherheit in der Zerlegung der zu teilenden Zahl auf Grund des Einmaleins der Zehner. D i e s e Z e r l e g u n g i s t s o w i c h t i g, d a ß w i r s i e b e i j e d e m n e u e n T e i l e r z u e r s t f ü r s i c h ü b e n. Bei dem Teilen durch 4 lassen wir zunächst die Einmaleinszahlen 40, 80 bis 400 angeben. Wir zerlegen sodann einige Zwischenzahlen. 90 ist 80 + 10; 112 ist 80 + 32; 260 ist 240 + 20. Erst wenn die Schüler diese Zerlegung ohne Hilfe sicher machen können, gehen wir zum Teilen selbst über. Auch hier fangen wir mit der Zerlegung an. 100 : 4! „100 ist 80 + 20; 80 : 4 ist 20, 20 : 4 ist 5, zu 20 ist 25.“ 260 : 4! „260 ist 240 + 20; 240 : 4 ist 60, 20 : 4 ist 5, zu 60 ist 65.“ Nach einiger Übung lassen wir den Zerlegungssatz nicht mehr aussprechen; die Kinder müssen sich die Zerlegung gegenwärtig halten und rechnen: ¼ von 260! „¼ von 240 ist 60, ¼ von 20 ist 5, zu 60 ist 65“; später noch kürzer: „¼ von 260 = 60 + 5 = 65.“

Zweckmäßig ist es, die Probe machen zu lassen. Hat der Schüler die Aufgabe 332 : 4 gelöst, so wird er veranlaßt, 4 · 83 zu berechnen.

$4 \cdot 80 = 320$, $4 \cdot 3 = 12$, zu 320 ist 332. Dadurch sieht der Schüler, daß er beim Teilen durch 4 die Zahl 332 in 320 und 12 zerlegen muß. Geht die Rechnung nicht auf, so wird der Rest angegeben.

78 : 3	468 : 6	500 : 6
78 = 60 + 18	468 = 420 + 48	480 : = 80
60 : 3 = 20	420 : 6 = 70	20 : 6 = 3, R. 2
18 : 3 = 6	48 : 6 = 8	500 : 6 = 83, R. 2.
78 : 3 = 26	468 : 6 = 78	

Anwendung wie unter 1. Die Zahlen werden entsprechend verändert.

Zu 3. Das Einmaleins mit diesen Zahlen ist erst auf dieser Stufe gelernt worden (§ 4). Hier werden also nur die Einmaleinszahlen dividiert.

Zu 4. Der Schüler wird ohne Schwierigkeit erkennen, wie $8:4=2$, $80:4=20$ ist, so ist $800:4=200$. Bei $360:3$ muß der Schüler zerlegen: $360 = 300 + 60$ usw.

Zu 5. Der Schüler hat gelernt: Wir vervielfachen eine Zahl mit 10, indem wir rechts eine Null anhängen. Daraus erkennt er unmittelbar: Wir teilen eine Zahl durch 10, indem wir bei den reinen Zehnerzahlen (40, 70, 120) die Null (Einerstelle) abschneiden. Sind Einer vorhanden (45, 128), so bilden diese den Rest in dem Ergebnisse. Zweckmäßig ist es, einige der zu teilenden Zahlen anzuschreiben und bei der Teilung durch 10 die Einer durch ein Komma abzuschneiden.

Bruchrechnung.

1. $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Verwandle ebenso in einen Bruch: $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$, $4\frac{5}{6}$, $8\frac{7}{8}$, $9\frac{3}{10}$, $6\frac{5}{12}$!
(Eine ganze Zahl mit einem Bruche heißt „gemischte Zahl".)
2. $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$; $\frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$. Verwandle in gemischte Zahlen: $\frac{9}{2}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{25}{8}$, $\frac{35}{8}$, $\frac{69}{10}$, $\frac{65}{12}$!
3. Wieviel Stck. sind $1\frac{1}{2}$ Dtzd.? $1\frac{1}{2}$ Schck.? $1\frac{3}{4}$ Dtzd.? $2\frac{1}{4}$ Schck.?

Wiederholung.

4. 80, 240, 355, 478, 739. Lege zu jeder Zahl 60! lege 28 zu!
5. Von jeder Zahl in voriger Nr. ziehe 60 ab! ziehe 79 ab!
6. 25, 36, 63, 72, 99. Vervielfache diese Zahlen mit 6! mit 8!
7. Wieviel Wochen und Tage sind 15, 30, 40, 50 Tage?
8. Wieviel Schock und Mandel sind 10, 25, 30, 35, 42 Mandel?

B. Das Tafelrechnen

wird auf die Teilung zwei- und dreistelliger Zahlen durch die Grundzahlen beschränkt, und wir arbeiten immer im Sinne des Teilens. Der

Doppelpunkt wird „geteilt durch" gelesen und steht stets hinter der zu teilenden Zahl; nach dem Doppelpunkte steht der Teiler und rechts von diesem das Gleichheitszeichen.

a.	b.	c.
H.Z.E.	H.Z.E.	H.Z.E.
864 : 2 = 432	756 : 2 = 378	805 : 4 = 201
8 H.	6 H.	8 H.
6 Z.	15 Z.	05 E.
6 „	14 „	4 „
4 E.	16 E.	R. 1
4 „	16 „	

d. 416 : 8 = ? e. 756 : 4 = 189. (über 756: 3 3)

Entwicklung des Verfahrens. a) Es sollen 8 H., 6 Z., 4 E. durch 2 geteilt werden. Wir beginnen mit den Hundertern. Wie heißt die erste kleine Teilaufgabe? „8 H. : 2 sind 4 H." Die 4 H. schreiben wir hinter das Gleichheitszeichen. Wir haben 2 · 4 = 8 H. verteilt. Die 8 setzen wir unter die 8 H., machen einen Strich und ziehen ab. Es bleibt nichts übrig. „Wir ziehen die 6 Zehner herunter." Zweite kleine Aufgabe! „6 Z. : 2 sind 3 Z." Wir setzen die 3 Z. rechts neben die 4 H. usw. Welche Zahl haben wir geteilt? Wie heißt der Teiler? Wie heißt der Teil?

Zu b). Lies die Aufgabe! Wieviel H., Z. und E. hat 756? Wie heißt die erste kleine Aufgabe? „7 H. : 2 = 3 H." Wir schreiben die 3 H. hinter das Gleichheitszeichen; 2 · 3 H. = 6 H. Wohin setzen wir die 6 H.? Wir ziehen ab; es bleibt 1 H.; den machen wir zu Zehnern und ziehen dazu die 5 Z. herunter. Wie heißt jetzt die kleine Aufgabe? „15 Z. : 2 = 7 Z." Wohin schreiben wir die 7? 2 · 7 Z. = 14 Z. Wohin schreiben wir die 14? Was tun wir jetzt? „Wir ziehen einen wagerechten Strich und ziehen ab." Wie heißt der Rest? 1 Z.; den machen wir zu Einern und ziehen die 6 Einer dazu herunter. Wie heißt jetzt die kleine Aufgabe?

Bei Aufgabe c) ist den Kindern klar zu machen, daß keine Zehner kommen; es ist ihnen einzuschärfen, daß sie deswegen in das Ergebnis sofort eine Null setzen müssen, was der kleine Rechner leider oft vergißt.

Bei Aufgabe d) zeigen wir den Kindern, daß keine Hunderter herauskommen, daß also die erste kleine Aufgabe heißt: 41 Z. : 8.

Zu e). Für das spätere Rechnen mit dem Bruchsatze ist es unbedingt nötig, daß die Schüler durch einen einstelligen Teiler so teilen können, daß nur der Teil hingeschrieben wird, von der Ausrechnung aber nichts. Die Reste, die sich beim Teilen der einzelnen Stellen ergeben, behält man im Kopfe und fügt die nächste Stelle hinzu. Bei Beginn der Übung kann man als Gedächtnishilfe die Reste in

kleinen Ziffern über den Dividendus setzen, wie das Beispiel es zeigt; später fällt das auch fort. Man beginne mit der Übung aber erst, nachdem die Schüler in der bisher geübten Form recht sicher sind.

6.

Das Teilen gemischter Zehnerzahlen durch 2; ohne Zehnerauflösung.[1] (Für die Unterstufe.)

1. Vorbereitung: Wir haben bisher reine Zehnerzahlen geteilt; wir wollen heute zunächst solche Aufgaben mit dem Teiler 2 wiederholen! Wie groß ist die Hälfte von 40? — Suche die Hälfte von 60! — Teile 80 durch 2! — Rechne: 100 geteilt durch 2! — Bilde eine Reihe, in der die Hälfte von 20, 40, 60, 80 und 100 angegeben wird! — (½ von 20 = 10 usw.) Sage dieselbe Reihe rückwärts in dieser Form: 100 geteilt durch 2 = 50, 80 geteilt durch 2 = 40 usw.! Nenne nur die Zehnerzahlen, die sich leicht durch 2 teilen lassen! (Üben!) — Ein Schock hat 60 Stück; wieviel Stück hat ½ Schock? (Ähnliche Aufgaben!)

2. Ziel und Darbietung: Wir haben bisher nur reine Zehner geteilt; heute wollen wir nun Zahlen durch 2 teilen lernen, die Zehner und auch Einer enthalten! Dazu gehört folgende Aufgabe: Zwei Knaben wollen sich gleichmäßig in 24 Nüsse teilen; wieviel Nüsse erhält jeder? Wiederhole diese Aufgabe! — Welchen Teil von 24 Nüssen mußt du suchen? — (Die Hälfte.) Die Hälfte von 24 findest du nicht sogleich; aber es liegt unter der 24 eine reine Zehnerzahl, von der du die Hälfte sehr leicht findest. Welche Zehnerzahl ist das? — Nun zerlege 24 in 20 und die noch übrigen Einer! — Wir haben also aus den 24 Nüssen zwei Haufen gebildet; wieviel Nüsse enthält der erste Haufen? — Wieviel Nüsse enthält der zweite Haufen? — Jetzt suche die Hälfte vom großen Haufen, von 20 Nüssen! — Nun suche auch die Hälfte vom kleineren Haufen, von 4 Nüssen! — Wieviel betragen beide Ergebnisse zusammen? — Von welcher Anzahl sind diese 12 Nüsse also die Hälfte? — Wir wollen das vorrechnen: „Wieviel ist die Hälfte von 24 Nüssen? 24 Nüsse sind 20 Nüsse und 4 Nüsse; die Hälfte von 20 Nüssen ist 10 Nüsse; die Hälfte von 4 Nüssen ist 2 Nüsse; 10 Nüsse und 2 Nüsse sind 12 Nüsse; also die Hälfte von 24 Nüssen 12 Nüsse." — Wiederhole die Aufgabe und rechne sie vor!

3. Verknüpfung: Wieviel Nüsse erhält jeder von den zwei Knaben, wenn 26 Nüsse zu verteilen sind? (Die Lösung in ähnlicher Weise wie oben unter 2; ebenso werden 28, 22, 46, 48 usw. Nüsse geteilt.)

[1] Heilmann, Handbuch der Pädagogik. II. Band: Besonders Unterrichtslehre. 9. Aufl. Leipzig 1911. S. 206—8.

4. Zusammenfassung: Wir haben hier bei allen Aufgaben die zu teilenden Nüsse in einen größeren und einen kleineren Haufen gesondert. Welche zwei Haufen bildeten wir aus 48 (42, 64 usw.) Nüssen? — Kurz, wir zerlegen die zu teilende Zahl. Welche Zahl bildete den größeren (den kleineren) Haufen? — Und so wollen wir es stets halten bei allen diesen Aufgaben des Teilens! Wie zerlegst du also, wenn du rechnen sollst 48 : 2? — Welche Zahl teilst du zuerst? — hernach? — Was geschieht mit jenen beiden Ergebnissen 20 und 4? — Wiederhole im Zusammenhange, wie du 48 durch 2 teilst! — Wie rechnest (zerlegst und teilst) du bei folgender Aufgabe: Wieviel beträgt die Hälfte von 82? usw.

5. Übung: a) In reinen Zahlen. Wieviel ist die Hälfte von 68? — Rechne die Aufgabe vor! — Wir wollen die Hälfte von 86 suchen; wie zerlegst du 86 vor der Teilung durch 2? — Suche nun die Hälfte von 86! — Rechne vor! usw.

b) In benannten Zahlen. Suche die Hälfte von 42 ℳ! — Wiederhole die Aufgabe und rechne sie vor! usw.

c) Angewandte Aufgaben. Anna zahlt für zwei Meter Band 48 ₰; wieviel Pfennig kostet ein Meter? Wiederhole diese Aufgabe! — Berechne den Meterpreis! — Wiederhole die Aufgabe und rechne sie vor! usw.

7.
Die Eins.[1])

I. Stufe der Anschauung.

A. Zergliederung. Wir wollen lernen, wie viel Eins ist. Seht diesen Griffel! Wie viele sind's? — Diese Mark! Wie viele sind's? — Diesen Soldaten! Wie viele sind's? — Wie viele Tafeln hast du? — Ich schlage mit dem Stock auf den Tisch! Wie viele Schläge waren es? — Wiederholt (vorzeigen, Chorsprechen):

Ein Griffel,
eine Mark,
ein Soldat,
eine Tafel,
ein Schlag.

Für eines von jedem Dinge sagt man Eins. Wiederhole den Satz! Nenne Dinge im Zimmer (zu Hause, draußen), von denen eins vorkommt!

Für Eins schreibt man dieses Zeichen: 1. Lest alle: Eins. Da habe ich euch noch eine ganz große 1 angeschrieben. (Zerlegen, beschreiben.) Schreibt die 1 auf eurer Tafel! (Hausaufgabe).

[1]) Wolsemann, Methodik des elementaren und höheren Schulunterrichts. Heft 1: Zahlen- und Formenlehre. Hannover 1910. S. 100 und 101.

NB. Empfehlenswert ist der Gebrauch einer Tafel oder eines Heftes mit Quadratnetz. Es muß den Kindern durch Vormachen an der Wandtafel gezeigt und wiederholt gesagt werden, daß jede 1 ein Feld für sich bekommt, daß nach jeder 1 ein Feld und nach jeder Reihe eine Reihe frei bleibt.

B. Aufbau. Ihr seht hier eine Kugel (einen Punkt); diese Kugel bedeutet eins (eines von jedem Dinge). Wiederhole, was die Kugel bedeutet! Die Kugel wollen wir zeichnen (Vorzeichnen eines „Kastens" mit einem Punkt darin). Seht hier das Bild der Eins! Sage, wie es aussieht! Zeichnet auch das Bild der Eins!

II. Stufe der Erkenntnis. Fällt fort, da erst ein Zahlbegriff gewonnen ist und zu einem Zahlurteil mindestens zwei Begriffe erforderlich sind.

III. Stufe der Anwendung. Hebt einen Arm hoch! Zeigt einen Finger! Klappt einmal in die Hände! Gib an, wie viele Sonnen am Himmel stehen (wieviel Lehrer im Schulzimmer sind, wie viele Türme die Kirche hat, wie viele Kaiser wir haben usw.)! Ihr kennt alle eine Lampe; gib an, welche Teile der Lampe eines sind! Zähle auf, was am Hunde (am Hasen, an der Blume usw.) eines ist! — Auf der ersten Seite eures Rechenbuches seht ihr das Bild der Eins! Beschreibe es! (Ein Kasten, oben links ein Punkt darin.) Zeichnet zu Hause das Bild nach, nicht bloß einmal, sondern eine halbe Seite voll! —

8.

Die Einmaleinszahl 18.[1])

IA. Wiederhole 1×3 bis 5×3; 1×6 bis 2×6.
IB. Aufbau von 6×3 und 3×6 (große Zahlbildtafel).

Wieviel stehen links immer beieinander? Wievielmal 3 sind in der ersten Reihe? In der zweiten Reihe? Wievielmal 3 sind's also im ganzen? Wieviel stehen rechts immer beieinander? Wievielmal 6 sind vorhanden? Gib noch einmal die Anzahl und die Malzahl an — links! rechts! —

IIA. Wir wollen jetzt die Gesamtzahl suchen. Zähle zusammen, wieviel links im ganzen vorhanden sind! (Beachtung der Zehnergrenze!) Wieviel ist also 6×3? Wie haben wir's gefunden? (Die 6 Dreien zusammengezählt.) Sucht rechts die Gesamtzahl! Wieviel ist also 3×6? Wie haben wir's wieder gefunden? (Die 3 Sechsen zusammengezählt.) Das Zusammenzählen

[1]) ebenda S. 109—11.

dauert ziemlich lange; man muß sich deshalb die Gesamtzahl zu jeder Malzahl und Anzahl fest einprägen.

IIB 1. Wenn man zu einer Anzahl und Malzahl die Gesamtzahl sucht, so nimmt man mal.

IIA 2. Gib noch einmal an, wieviel 6×3 ist? Und 3×6? Ihr seht, daß beides gleich viel ist. Zeige am Bilde rechts, daß es nicht anders sein kann! (jede 6 ist 2×3, die 3 Sechsen sind also 6×3).

IIB 2. Was lernt ihr daraus? (Man kann Malzahl und Anzahl miteinander vertauschen.) Man hat deshalb auch für Malzahl und Anzahl denselben Namen; man sagt für beide „Faktoren". Was herauskommt (die Gesamtzahl) nennt man „Produkt".

IIA 3. Wir wollen jetzt sehen, wie oft die Anzahl in der Gesamtzahl enthalten ist. Wie oft ist 3 in 18 enthalten? 6 in 18? Welche Zahl gibt an, wie oft die Anzahl in der Gesamtzahl enthalten ist?

IIB 3. Die Anzahl ist so oft in der Gesamtzahl enthalten, wie die Malzahl angibt. Einübung der schriftlichen Form: 3 in 18=6×, 6 in 18=3×. Angliederung an die betreffenden Einsineinsreihen.

IIA 4. Wir wollen jetzt die Gesamtzahl in so viele Teile zerlegen, als die Malzahl angibt. Wie heißt die Malzahl hier (6). Teile 18 in 6 gleiche Teile; wie groß ist jeder Teil? Teile 18 in 3 gleiche Teile; wie groß ist jeder Teil? Sprecht: 18:6=3; 18:3=6. Welche Zahl gibt an, wie groß der Teil ist?

IIB 4. Wenn man die Gesamtzahl in so viele Teile teilt, als die Malzahl angibt, so ist jeder Teil gleich der Anzahl. Einübung der schriftlichen Formen (Antwort ohne ×, auch nicht: „geht" soviel mal, sondern: geteilt durch — ist). Angliederung an die betreffenden Einsdurcheinsreihen.

IIA 5. Ich habe soeben links und rechts 2 hinzugelegt! Wie groß ist nun die Gesamtzahl? Wieviel × 3 und wieviel ist 20? Wieviel × 6 und wieviel ist 20? Wievielmal mag nun 3 in 20 enthalten sein? Es bleiben 2 übrig. Diese 2 können nicht mit geteilt werden. Wir wollen sie deshalb den Rest nennen. Wieviel ist also 3 in 20? (3 in 20=6× und 2 R.). Wieviel ist 6 in 20? (6 in 20=3× und 2 R.). Derselbe Rest bleibt auch, wenn wir 20 durch 6 oder durch 3 teilen. Wieviel ist also 20:6? 20:3? — Einige andere Beispiele, etwa: 3 in 19, 6 in 23, 19:3, 21:6.

IIB 5. Wenn man zur Gesamtzahl eine kleinere Anzahl hinzulegt, so kommt diese beim Teilen als Rest.

III. Aufgaben zur Multiplikation der 3 und 6 ohne und mit Ergänzung, ferner zum Enthaltensein der 3 und 6 ohne und mit Rest, endlich zum Teilen durch 6 und 3 ohne und mit Rest. Wiederholungsaufgaben zu den Einmaleinszahlen von 4 bis 18.

Das vorstehende Lehrbeispiel enthält den intellektuellen Ertrag der Bearbeitung **jeder einzelnen** Einmaleinszahl. Daraus folgt, daß sich die Behandlung in den wesentlichen Stücken wiederholen und deshalb mit der Zeit leichter und schneller vonstatten gehen muß als zu Anfang. Die Sätze des Malnehmens, Enthaltenseins und Teilens werden bald ohne Schwierigkeit **auf den ersten Blick aus der Anschauung entnommen**, und man kann dann sogleich zur Verknüpfung und Befestigung schreiten; dabei darf die **Angliederung an die angefangenen Reihenbildungen** nicht vernachlässigt werden. Die volle gedächtnismäßige Beherrschung dieses Stoffes wird am besten durch die planmäßige Benutzung der S. 84 beschriebenen Tabelle nach der a. a. O. gegebenen Anweisung erreicht. — Noch ist zu bemerken, daß das Malnehmen mit Ergänzung und das Teilen mit Resten (IIA 5, B 5) zweckmäßig bis zur Erledigung der ersten 11 Einmaleinszahlen zurückgestellt, alsdann in dem Umfange bis 20 nachgeholt und erst von da ab der Behandlung der einzelnen Einmaleinszahl angeschlossen wird.

9.
Mischungsrechnung.[1])

I. A. Die Stufe der Analyse hat den Zweck, die zur Auffassung des Neuen erforderlichen Begriffe vorher zum klaren und geläufigen Bewußtsein zu bringen. In diesem Falle handelt es sich um den Begriff der **Mischung** und was damit zusammenhängt.

1. Wer stellt eine Mischung her? Ein Kaufmann. Er kauft Waren je nach der Güte zu verschiedenen Preisen ein. Bei einigen Waren ist es ihm gestattet, solche von verschiedenem Werte zu mischen, z. B. Kaffee, Tee, Tabak. Ferner mischen Weinhändler, Kornhändler, Hausfrauen Waren verschiedenen Wertes. (Beispiele!)

2. **Weshalb** wird eine Mischung hergestellt? Ein Kaufmann hat vielleicht Kaffee, den er des hohen Preises wegen nicht verkaufen kann, und andern zu einem billigeren Preise. Dann kann er den teuren Kaffee mit dem billigen mischen und so eine Sorte herstellen, die er leicht verkaufen kann. Oder eine Hausfrau brennt selbst den Kaffee und nimmt dazu verschiedene Sorten. Der gute Kaffee allein ist ihr zu teuer; die billige Sorte ist wieder nicht gut genug. Sie kann dann aus beiden Sorten eine gute Mischung herstellen. (Weinhändler, Getreidehändler usw.)

1) ebenda S. 129—31.

3. Zu welchem Preise muß die Mischung verkauft werden? Die Kinder geben an: Der Kaufmann darf nicht die ganze Mischung für den teuren Preis verkaufen, weil er dann seine Käufer übervorteilen würde. Ebensowenig kann er die Mischung für den billigen Preis abgeben, da sich dann für ihn ein beträchtlicher Verlust einstellen würde. Um nun seinem Käufer und sich selbst gerecht zu werden, muß er einen Preis für die Mischung wählen, der zwischen dem teuren und dem billigen Preise steht. Diesen Preis nennt man den Durchschnittspreis. Wir wollen zunächst den Durchschnittspreis, alsdann die eine oder andere der gemischten Sorten berechnen.

I B 1. Ein Getreidehändler mischt Gerste und Hafer und zwar a) zu gleichen Teilen, b) $^1/_3$ zu $^2/_3$. Wie hoch muß er den Durchschnittspreis stellen, wenn 100 kg Gerste 23,40 *M*, 100 kg Hafer 19,80 *M* kosten?

2. Wieviel kg Kaffee à 1,60 *M* muß man zu 8 kg à 2,80 *M* mengen, damit das kg der Mischung auf 2 *M* zu stehen kommt?

II A 1. Wiederhole die erste Aufgabe! Wir fassen zunächst den Fall a) ins Auge. Da beide Sorten zu gleichen Teilen gemischt werden sollen, so nehmen wir an, daß 100 kg Gerste mit 100 kg Hafer gemischt werden. Wie hoch stellen sich die 100 kg Gerste? Die 100 kg Hafer? Wie hoch die 200 kg der Mischung? Wieviel kosten nun 100 kg im Durchschnitt? — Schriftliche Form:

100 kg der besseren	Sorte = 23,40 *M*
100 kg der geringeren	Sorte = 19,80 *M*
200 kg der Mischung	= 43,10 *M*
100 kg im Durchschnitt	= **21,60** *M*

Wir fassen jetzt den Fall b) ins Auge. In welchem Verhältnis sollen Gerste und Hafer gemischt werden? Stelle ein solches Verhältnis her! (100 kg Gerste, 200 kg Hafer.) Berechne die Preise für jede Sorte! Wie finden wir den Preis für 100 kg der Mischung? — Schriftliche Form:

100 kg der besseren	Sorte = 23,40 *M*
200 kg der geringeren	Sorte = 38,60 *M*
300 kg der Mischung	= 62,— *M*
100 kg im Durchschnitt	$= \frac{62,—}{3} =$ **20,67** *M*

2. Wiederhole die zweite Aufgabe! Gegeben ist außer dem Preise der besseren und dem der geringeren Sorte auch noch der Durchschnittspreis. Was soll berechnet werden? Wie werden wir's angreifen? Die Kinder müssen zunächst herausfinden, wieviel 1 kg

der besseren Ware mehr kostet, als 1 kg der Mischung und wieviel 1 kg der geringeren Sorte weniger kostet als 1 kg der Mischung. Schriftliche Darstellung:

bessere Sorte	2,30 ℳ	Durchschnittspreis 2 ℳ	— 30 ₰
geringere Sorte	1,60 ℳ		+ 40 ₰

Würde man 1 kg der Ware zu 2,30 ℳ für 2 ℳ verkaufen, so würde man 30 ₰ Verlust haben. Verkauft man 8 kg der Sorte zu 2 ℳ, so ist der Verlust 8×30 ₰ = 2,40 ℳ. Der Kaufmann will aber nicht verlieren, daher muß er an der geringeren Ware etwas gewinnen und zwar 2,40 ℳ. Verkauft er 1 kg der billigen Sorte zu 1,60 ℳ für 2 ℳ, so gewinnt er 40 ₰. Er will 2,40 ℳ an der Ware gewinnen. Er muß also so oft 1 kg der geringeren Ware beimischen, als 40 ₰ in 2,40 ℳ enthalten sind = 6 mal. Folglich muß er 6 kg der geringeren Sorte mit 8 kg der besseren Sorte mischen. Schriftliche Darstellung:

8 kg der besseren Sorte 8 × = 0,30 ℳ = 2,40 ℳ Verlust,
1 kg der geringeren Sorte = 0,40 ℳ Gewinn,

6 kg der geringeren Sorte = 2,40 ℳ Gewinn.

IIB. Seht jetzt auf die (angeschriebenen) Lösungen. Wie haben wir nach der ersten Lösung den Durchschnittspreis berechnet? (Wir haben zunächst den Preis jeder Sorte berechnet, alsdann die Mengen und die Beträge dafür addiert und schließlich von der Summe den sovielten Teil genommen, als die zu berechnende Menge in der ganzen Menge enthalten ist.)

Gib ebenso das Verfahren bei der zweiten Lösung an! Vergleiche es mit dem Verfahren bei der erste Lösung! (Stimmen überein.) Wiederhole, wie man den Durchschnittspreis berechnet!

Seht jetzt auf die dritte Lösung! Was haben wir zuerst bestimmt? (Den Verlust bzw. Gewinn an einer Mengeneinheit der besseren bzw. geringeren Sorte.) Was haben wir aus dem ersten Ergebnis berechnet? (Den Gesamtverlust an der besseren Sorte.) Dieser Verlust muß durch einen entsprechenden Gewinn an der geringeren Sorte ausgeglichen werden. Wie haben wir die gesuchte Menge der geringeren Sorte gefunden? Wiederhole, wie man die geringere Sorte berechnet! (Man bestimmt nach dem Durchschnittspreise den Verlust und den Gewinn an einer Mengeneinheit der besseren bzw. geringeren Sorte, berechnet alsdann den Gesamtverlust an der besseren Sorte und teilt in diesen den Gewinn an einer Mengeneinheit der geringeren Sorte.) An einer weiteren Aufgabe

wird gezeigt, daß das Verfahren im wesentlichen dasselbe bleibt, wenn statt der geringeren die bessere Sorte zu berechnen ist.

III. Lösung einschlägiger Aufgaben, teils im Kopfe, teils schriftlich.

10.

Die Einführung in das Wesen der Dezimalzahlen.[1)]

(Für das 6. Schuljahr.)

A. Sachgebiet.

Unsere dezimalen Münzen, Maße und Gewichte.

a) Münzen. Einheit: Die Mark; die übrigen Münzen sind Vielfache oder Teile derselben. Schreibweise. (Beispiele!) b) Längenmaße. Einheit: Das Meter. Vielfache und Teile desselben. Schreibweise. (Beispiele!) c) Flächenmaße. Einheit: Das Quadratmeter. Vielfache und Teile desselben. d) Hohlmaße. Einheit: Das Liter. e) Gewichte. Einheit: Das Gramm. f) Papiermaße. Einheit: Das Ries. — Währungszahlen.

B. Rechenübungen[2)].

a) Zehntel (z), Hundertstel (h), Tausendstel (t).

1. Zählen: 1, 2 ... 10; 10, 20 100; 100, 200 ... 1000; 1000, 2000 ... 10000; 10000, 20000 100000; 100000, 200000 ... 1000000.

2. Sätze: 10 E ist 1 Z; 10 Z ist 1 H; 10 H ist 1 T usw.

3. Zählen: 1000000, 900000 100000; 100000, 90000 ... 10000 usw.

4. Sätze: 1 Mll ist 10 Ht; 1 Ht ist 10 Zt; 1 Zt ist 10 T usw.

5. Sätze: 1 E mal 10 ist 1 Z; 1 Z mal 10 ist 1 H usw. bis: 1 Ht mal 10 ist 1 Mll. (Erste Form.) Das 10fache von 1 E ist 1 Z; das 10fache von 1 Z ist 1 H usw. bis: das 10fache von 1 Ht ist 1 Mll. (Zweite Form.)

6. Sätze: 1 Mll durch 10 ist 1 Ht usw. bis: 1 Z durch 10 ist 1 E. (Erste Form.) Der 10. Teil von 1 Mll ist 1 Ht usw. bis: der 10. Teil von 1 Z ist 1 E. (Zweite Form.)

*7. 1·10, 10·10, 100·10 ... 100000·10.

*8. 1000000 : 10, 100000 : 10 ... 10 : 10.

*9. 1 km : 10; 1 m : 10; 1 cm : 10; 1 qkm : 10; 1 ha : 10; 1 a : 10; 1 qm : 10; 1 qcm : 10.

*10. 1 ℳ : 10; 1 hl : 10; 1 t : 10; 1 kg : 10; 1 g : 10; 1 Rs : 10.

Merke: Den zehnten Teil nennt man 1 Zehntel (z).

[1)] Zeißig und Fritzsche, Praktische Volksschulmethodik. 2. Aufl. Leipzig 1908. S. 198—200.

[2)] Aufgaben mit * sind auch schriftlich zu erledigen.

11. Berechne 1 Zehntel von: a) 1 km, 1 m, 1 cm; 1 qkm usw. (Nr. 9); b) 1 ℳ; 1 hl; 1 t usw. (Nr. 10)!

12. Desgleichen von: 1 Mll, 1 Ht . . . 1 Z!

13. Merke: Da 1 Zehntel von 1 cm ebensoviel wie 1 mm ist, so darf man kurz sagen: 1 mm ist ein Zehntel-Zentimeter. Bilde entsprechende Sätze für 2 mm, 3 mm . . . 10 mm!

*14. Schreibweise: a) 1 mm = 0,1 cm; 2 mm = 0,2 cm . . . 10 mm = 1,0 cm; b) 0,1 cm = 1 mm . . . 1,0 cm = 10 mm!

(Sprich: 1 mm ist 1 Zehntel-Zentimeter usw.!)

*15. a) 11 mm = 1 cm 1 mm = 1,1 cm; 12 mm = 1 cm 2 mm = 1,2 cm . . . 20 mm = 2 cm 0 mm = 2,0 cm; b) 1,1 cm = 1 cm 1 mm = 11 mm; 1,2 cm = 1 cm 2 mm = 12 mm . . . 2,0 cm = 2 cm 0 mm = 20 mm. (Sprich: 11 mm oder 1 cm und 1 mm sind 1 und 1 Zehntel-Zentimeter usw.!)

*16. a) 21 cm = 2 cm 1 mm = 2,1 cm; ebenso: 28, 36, 40, 52, 69, 70, 85, 93, 104, 127 mm; b) 2,1 cm = 2 cm 1 mm = 21 mm; ebenso: 2,3; 3,5; 4,7; 5,0; 6,2; 7,4; 8,0; 9,6; 10,8; 12,9 cm.

17. Wieviel ist 1 Zehntel von 10, 100, 1000 . . . 1000000? (Sprich: 1 Zehntel von 10 ist 1 usw.! Umkehrung: 1 ist 1 Zehntel von 10 usw.)

18. Wieviel ist 1 z von 1 Z, 1 H . . . 1 Mll? (Sprich: 1 Zehntel von 1 Zehner ist 1 Einer usw.!) Umkehrung: 1 E ist 1 z von 1 Z usw.

19. Wieviel ist 1 z von 1 E? Merke: 1 Zehntel von 1 Einer nennt man 1 Zehntel (z). 1 Einer hat 10 Zehntel. Die Zehntel bilden eine besondere Zahlordnung. Zählen: a) 1 z, 2 z . . . 10 z; 1 E, 2 E . . . 10 E; 1 Z, 2 Z . . . 10 Z; b) 10 Z, 9 Z . . . 1 Z; 10 E, 9 E . . . 1 E; 10 z, 9 z . . . 1 z.

20. Merke: Die Zehntel erhalten ihre Stelle rechts neben den Einern. Diese Stelle heißt Zehntelstelle. Einer- und Zehntelstelle werden durch ein Komma getrennt. Sind keine Einer vorhanden, so setzt man eine Null in die Einerstelle. Schreibweise: a) 1 z = 0,1; 2 z = 0,2 . . . 10 z (1 E) = 1,0; b) 1 E + 1 z = 1,1; 1 E + 2 z = 1,2 . . . usw.

21. Lesen: 0,7 (sprich: 7 Zehntel!); 3,7 (sprich: 3 und 7 Zehntel!) usw. Dann: a) 0,3; 0,6; 0,9; 0,1; 0,4; 0,7; 0,2; 0,5; 0,8; b) 1,1; 2,5; 3,2; 4,6; 5,3; 6,7; 7,4; 8,8; 9,5; c) 11,1; 23,6; 35,2; 47,7; 59,3; 60,8; 72,4; 84,9; 96,5; d) 3,4; 0,8; 65,3; 5,7; 0,5; 70,2; 6,1; 0,6; 42,9.

*22. Schreiben mit Ziffern nach Diktat: 6 E 3 z = 6,3 usw. Ebenso: a) 3 E 2 z; 8 E 5 z; 4 E 9 z; 9 E 6 z; 6 E 4 z. b) 8 z; 3 z; 7 z; 1 z; 5 z.

*23. Ebenso: a) 32 E 5 z; 85 E 9 z; 48 E 2 z; 96 E 7 z; 50 E 4 z. b) 5 E 2 z; 9 z; 14 E 7 z; 4 z; 80 E 3 z.

24. Zerlegen: 5,8 = 5 E + 8 z; 69,4 = 6 Z + 9 E + 4 z usw. Zerlege ebenso: 3,9; 7,2; 4,8; 12,6; 24,3; 68,5; 80,4; 127,1; 365,7; 506,9!

25. Verwandeln: 5,8 = 50 z + 8 z = 58 z; 13,4 = 130 z + 4 z = 134 z usw. Verwandle ebenso: 8,7; 4,8; 9,5; 19,2; 88,4; 60,9; 163,1; 423,6; 701,8; 960,3!

Merke: Den 100. Teil nennt man 1 Hundertstel (h).

26. Berechne 1 h von: a) 1 km, 1 m; 1 qkm, 1 ha, 1 a, 1 qm, 1 qcm; b) 1 ℳ; 1 hl; 1 t, 1 kg, 1 g; 1 Rs!

27. Merke: Da 1 h von 1 ℳ ebensoviel ist wie 1 ₰, so darf man kurz sagen: 1 ₰ ist 1 Hundertstel-Mark. Bilde entsprechende Sätze für 2, 3, 4 . . . 10 ₰; 28, 36, 44, 52, 61, 73, 85, 97 ₰!

*28. Schreibweise: a) 1 ₰ = 0,01 ℳ; 2 ₰ = 0,02 ℳ . . . 10 ₰ = 0,10 ℳ; 11 ₰ = 0,11 ℳ . . . (nach Bedürfnis). b) Umkehrungen 0,01 ℳ = 1 ₰ . . . (Zu sprechen ist z. B.: 3 ₰ sind 3 Hundertstel-Mark usw.)

*29. 101 ₰ = 1 ℳ 1 ₰ = 1,01 ℳ . . . 110 ₰ = 1 ℳ 10 ₰ = 1,10 ℳ. Ebenso: 112, 124, 146, 168, 190, 219, 337, 405, 573, 601 ₰.

*30. 1,01 ℳ = 1 ℳ 1 ₰ = 101 ₰ . . . 1,10 ℳ = 1 ℳ 10 ₰ = 110 ₰. Ebenso: 1,13; 1,25; 1,37; 2,49; 4,50; 6,72; 8,64; 7,56; 9,08; 5,01 ℳ.

Anmerkung: Bei Nr. 27 bis 30 können nach Bedürfnis auch andere Sorten (z. B. 1 cm = 0,01 m) herangezogen werden.

31. Wieviel ist 1 h von 1 H, 1 T, 1 Zt, 1 Ht, 1 Mil? (Nr. 18.) Sätze. Umkehrungen.

32. Wieviel est 1 h von 1 E?

Merke: 1 Hundertstel von 1 E nennt man ein Hundertstel (h). 1 Einer hat 100 Hundertstel. Die Hundertstel bilden eine besondere Zahlordnung.

33. Wieviel Hundertstel hat 1 Zehntel?

Merke: Die Hundertstel erhalten ihre Stelle rechts neben den Zehnteln. Diese Stelle heißt Hundertstelstelle. Schreibweise: 5,63 (sprich: 5 E 6 z 3 h!); 5,04 (sprich: 5 E 4 h!) usw. usw.[1]).

[1]) Die Übungen dieser Unterrichtseinheit setzen sich fort bis zur Nr. 100.

§ 5. Der Abbau.

Vorbemerkung. Wenn an dieser Stelle eine Kritik erscheinen muß, so kann sie nur in großen Zügen gehalten sein; sie darf nicht ins einzelne gehen. Denn mit der Begründung der Einzelheiten der Kritik wird besser der aufbauende Teil verbunden, damit zugleich gezeigt werden kann, auf welchem Wege und mit welchen Mitteln den einzelnen Übelständen abgeholfen werden kann. Weiter soll diese vorläufige Kritik nicht eine umfassende sein in dem Sinne, daß genau abzuwägen wäre, was gut, was noch verwendbar und was zu verwerfen sei; sie wird vielmehr in großen Zügen die Gründe darlegen, die zu einem Neubau nötigen.

Wenn der Uneingeweihte sich die Ziele, die Lehrpläne und die Musterbeispiele des bisherigen Rechenunterrichts vergegenwärtigt, so hat er zunächst den Eindruck, daß eine fast unübersehbare Summe von Arbeit und Erfahrung in diesen Bestimmungen und Beispielen niedergelegt ist. Er schließt dann weiter, daß doch alles in schönster Ordnung sein müsse, und begreift nicht die allgemeine Klage über den Mißerfolg der aufgewandten Mühe. Da dieser Mißerfolg aber schlechterdings nicht zu leugnen ist, so kann er seiner Meinung nach nur dem Fache selbst zugesprochen werden, mit andern Worten: Rechnen, Mathematik ist eine Sache, die nicht für die Allgemeinheit bestimmt sein kann; die um ihres eigenartigen Charakters willen eigenartige persönliche Voraussetzungen erheischt, die eben die große Mehrzahl nicht erfüllen kann.

Anders der psychologisch geschulte Beobachter. Er übersieht mit einem Blicke die gewaltige Divergenz zwischen seelischer Entwicklung und den Forderungen der Schule. Da wir nun die seelische Entwicklung unsers Geschlechts nicht ändern können, wohl aber die Forderungen der Schule, so enthalten eben diese Schulforderungen Irrtümer, die beseitigt werden müssen. Es sind folgende.

1. Unser Rechenunterricht geht aus vom Standpunkte des Erwachsenen, des gebildeten Erwachsenen. Dieser ist in der Lage, eine Anzahl Erscheinungen des Lebens zusammenzufassen in einen gemeinsamen Ausdruck, gemeinsame Beziehungen in eine Regel, wiederkehrende Beziehungen in ein Gesetz[1]). Mit einem gewissen Feingefühl und einer sich stetig steigernden Sicherheit belegt er nun neue ähnliche Fälle mit den gewonnenen Ausdrücken und Sätzen. Glaubt er, die Abstraktionen irgendeines Gebietes nicht genügend erfaßt zu haben, so zieht er daraus den Schluß, daß er die Bearbeitung dieses Gebietes hätte früher beginnen müssen, damit er ihm mehr Zeit hätte widmen können[2]); denn die Zeiteinteilung der Gegenwart gestattet selten einen verfügbaren Rest.

[1]) Er nennt gewisse ganz verschiedene Kriegsgeräte Schußwaffen und unterscheidet davon z. B. Hieb- und Stichwaffen. Er gewinnt aus verschiedenen Erfahrungen die Regel: Wir sind geneigt zu glauben, was wir wünschen.

[2]) So geht es manchen Leuten mit den Abstraktionen des ästhetischen Gebiets, anderen mit denen der Technik.

Dabei ist ihm der Gedanke fremd, daß Abstraktionen zu ihrer Bildung **Zeit** brauchen; er abstrahiert ja ununterbrochen, selbst in jeder Einzelerscheinung trennt er das Wesentliche vom Unwesentlichen.

Diese **Fähigkeit der Erwachsenen überträgt nun unser Rechenunterricht irrtümlicherweise auf das Kind.** Ganz besonders zeigt sich dies in der Annahme der Selbstverständlichkeit der mathematischen Form und in Methode und Plan des elementaren Rechenunterrichts[1].

Aber die menschliche Seele läßt sich eben vor einem gewissen Alter nicht zu Abstraktionen beliebiger Art zwingen. Eine große Zahl bilden sich zwar schon im Kindesalter, aber langsam und mit konkreten Umrissen, will sagen: noch nicht losgelöst von Vertretungsvorstellungen. Wenn es uns, den Erwachsenen, so scheint, als hätten die Kinder tatsächlich Abstraktionen in unserm Sinne vollzogen, so ist das in weitaus den meisten Fällen ein Irrtum; es ist in Wirklichkeit Nachsagerei, bei der die Fähigkeit eigener Konkretisierung fehlt. Dies gilt selbst in Fällen, wo anscheinend lange Gedankengänge und eine große Summe von einzelnen Abstraktionen „gelernt" worden sind, wie im Einmaleins, im Bruchrechnen, im Schlußrechnen usw.

2. Der Erwachsene hat das Bedürfnis, öfter vorkommende Tätigkeiten mechanisch abzukürzen und die Sicherheit ihrer erfolgreichen Durchführung technisch zu erhöhen. Die Rechnungs-, Quittungs- und Wechselformulare des Geschäftslebens, die Formulare der Post, die Listen der Schul- und aller anderen Verwaltungsbehörden, selbst die Vordrucke in Notizkalendern und viele ähnliche Erleichterungen sind des Zeuge. Es ist dies der **Schematismus**, eine außerordentlich wertvolle Erscheinung, weil sie Energie spart, Übersichtlichkeit und Vollständigkeit gewährleistet und selbst minder guten Kräften Leistungen ermöglicht, zu denen sie auf sich selbst gestellt nicht fähig wären[2].

Auch dieses **Bedürfnis nach Schematisierung** überträgt der Erwachsene irrtümlich auf das Kind. Er glaubt, der Rechenunterricht, der praktische Ziele erreichen wolle, müsse es ausstatten mit den Schemata für möglichst alle die verschiedenartigen im Leben vorkommenden Fälle. Dadurch werden die „Fälle des Lebens" maßgebend für Ziel, Lehrverfahren und Plan, und es ergibt sich daraus die gewaltige Stoffülle, unter der die Schule seit langem leidet.

Von hier aus wird es klar, daß der gesamte Rechenunterricht

[1] Man vergleiche im Lichte dieses Gedankens nochmals die vorgeführten Lehrproben, die im Hinblick auf das bisher Geschaffene unbedingt die Höhe der Entwicklung verkörpern.

[2] Daß der Schematismus, wie jede menschliche Einrichtung, auch Auswüchse zeigen kann, ist eine Sache für sich; darum handelt es sich hier nicht.

der Volksschule — und ein großer Teil des Rechenunterrichts der übrigen Schulen — durchaus von dem einen Gedanken der Stoffansammlung durchdrungen ist, der Stoffansammlung mit allen möglichen Mitteln, mit dem apperzeptiven der Abstraktion, wie mit dem mehr assoziativen des Schemas.

Die Kehrseite dieser stofflichen Orientierung unsers Rechenunterrichts ist eine nicht geringe psychologische Kenntnislosigkeit. Diese kommt eigenartigerweise den meisten, die an ihr leiden, gar nicht zum Bewußtsein, weil sie sich in dem Glauben befinden, daß sie sich seinerzeit eingehend mit Psychologie beschäftigt und seitdem selbst in verschiedene neuere Werke Einblick genommen hätten. Sie haben freilich vielleicht die Technik, aber nicht den Geist der heutigen Psychologie erfaßt. —

Es ist sehr beachtenswert in diesem Zusammenhange, daß auch der Blick auf die anderen Fächer unserer Erziehungsschulen zu dem gleichen Ergebnis führt, unser Schulunterricht sei in der Hauptsache vom Stoffprinzip beherrscht. Es zeigt sich darin, daß Art und Menge des zu übermittelnden Stoffes eigentlich im Vordergrund des Interesses steht bei fast allen, welche die Gestaltung des Unterrichts beeinflussen und durchführen; daß der Gedanke herrscht, ein Stoff müsse um seines allgemein anerkannten Bildungswertes willen irgendwo im Stoffplan der Schule untergebracht werden; daß das Werturteil der Erwachsenen das alleinige Motiv zu sein habe für die Auswahl der zu behandelnden Stoffe[1]); volkstümlich ausgedrückt: daß die meisten Stoffe behandelt werden müßten, damit der Schulentlassene „es gehabt habe".

Infolge der Herrschaft dieses Grundsatzes hat unser gesamter Unterricht eine eigenartige utilitaristische Tendenz angenommen, eine Richtung, bei welcher sehr viel geschieht nicht um der gegenwärtig zweckmäßigsten Bildung des Schülers willen, sondern um eines in der Zukunft liegenden Erfolges willen. Es schwebt gewissermaßen über der ganzen Klasse leise der Gedanke: „Warum ihr das lernt, könnt ihr zwar alle miteinander nicht begreifen; aber ihr werdet es schon später gut brauchen können." Und der Lehrplan entspricht dem und wählt aus, was das Kind „im Leben brauchen

[1]) Das darf nicht falsch aufgefaßt werden: Nie und nimmer verlangt die Erziehungsreform, daß das Werturteil des Kindes an die Stelle des Werturteils des Erwachsenen zu treten habe; sondern die kindliche Bildungsstufe, die intellektuelle und emotionale Struktur, bis zu welcher es sich entwickelt hat, soll maßgebend sein für die Auswahl der Erziehungsmaßnahmen, auch der Stoffe. Daß unter verschiedenen möglichen Stoffen das Werturteil des Erwachsenen entscheidet, ist so selbstverständlich, daß es mir widerstrebt, das auszusprechen. Leider ist das nötig solchen gegenüber, welche die Erziehungsreform der Gegenwart in Mißkredit bringen wollen. Auch darf nicht unausgesprochen bleiben, daß nach dem Geiste der meisten Lehrpläne die Rücksicht auf den Bildungsstandpunkt und den Bildungsfortschritt des Kindes eine mehr sekundäre Bedeutung hatte, nämlich für die Anordnung des Stoffes, zum Teil auch für die Art seiner Übermittlung.

kann", als Erwachsener natürlich. Das ist aber ein Energieverbrauch an falscher Stelle. Zwar weist die alte Schule auf den formalen Gewinn hin, den jeder solcher Energieverbrauch habe. Es ist aber dringend zu wünschen, daß der formale Gewinn wesentlich erhöht und gleichzeitig noch ein materialer Gewinn gemacht wird. Und dies ist möglich durch eine Änderung des Standpunktes.

Haben wir den ernsten Wunsch und Willen, daß unser Volk seine Aufgabe nicht erschöpft sehe in der Erhaltung und Überlieferung der Kulturgüter, sondern daß es die inneren Kräfte entwickle, welche die Grundlage und Vorbedingung des Aufstiegs zu immer höherer Kultur, vor allem zu immer höherer Gesittung sind, wollen wir also nicht Stillstand, sondern Fortschritt, so müssen wir in der Organisation unserer Erziehung den Blick umstellen lernen und an Stelle des Stoffprinzips das psychologische Prinzip herrschen lassen.

Dies würde sich darin zeigen, daß Art und Tempo der kindlichen Entwicklung — im Hinblicke auf die letzten und höchsten Erziehungsziele sowohl, wie im Bewußtsein der einzelnen Entwicklungsphasen — in den Vordergrund des Interesses der pädagogischen Kreise treten würde; daß unser Absehen darauf gerichtet wäre, die Kräfte des Kindes zu entwickeln, damit es befähigt werde, sich all des wertvollen Kulturgutes zu bemächtigen, das ihm irgend erreichbar ist; daß der Stoffgedanke aus der Vorzugsstellung, die er jetzt inne hat, herausgerückt und — als zwar hochbedeutsam, aber doch minder bedeutsam gegenüber der Entwicklung der eingeborenen Kräfte — an die zweite Stelle des pädagogischen Interesses gestellt würde.

Damit ist keine Revolution auf dem Gebiete der Erziehung befürwortet, nur eine veränderte innere Einstellung, die die Gewähr bietet, daß wir den höchsten Erziehungszielen ein gut Stück näher zu kommen vermögen[1]), als bei der alten Einstellung. Diese Umstellung wird nicht nur durch die ganze Entwicklung unsers Volkes wie unserer Wissenschaft gefordert, sondern sie ist auch

[1]) Dieser tiefernste Gedanke, dieses innerste Motiv unserer Erziehungsreform veranlaßt uns, in diesem Zusammenhange hinzuweisen auf Auslassungen, die in den letzten Jahren in Tageblättern und Zeitschriften erschienen sind unter Titeln wie „Die Klage über die schwere Schule", „Das Ende der Schulreform", „Überbürdungsfragen" und ähnlichen, und die anscheinend den Zweck verfolgten, im Hinblick auf „Lehren des Weltkriegs" eine Schulreform hintanzuhalten. Bedauerlicherweise beteiligten sich an solchem Gebaren nicht nur Leute, die durch ihr Eintreten für das „alte Bewährte" ein Geschäft zu machen hofften, sondern auch solche, deren gute Absichten außer Zweifel standen. Ihnen gegenüber ist es uns Bedürfnis, ausdrücklich festzustellen, daß die Erziehungsreform, wie wir sie mit vielen Gleichgesinnten wünschen, nicht das geringste zu tun hat mit einer sogenannten „leichten Schule", und daß es eine unbedachte Irreführung ist, wenn die Schulreformbewegung allgemein beurteilt wird als eine aus dem Auslande gekommene verwaschene Theorie von Kinderbeglückung.

schon von den pädagogischen Klassikern fast aller Zeiten vorgeahnt und herbeigewünscht worden[1]).

Der Rückblick auf die Klagen über den Rechenunterricht, auf die Lehrpläne und Lehrproben, endlich auf die Eigenart der in Betracht kommenden Grundsätze läßt keinen Zweifel darüber bestehen, daß in der stofflichen Orientierung unsers Rechenunterrichts der letzte und innerste Grund der beklagten mangelhaften Ergebnisse zu suchen ist.

Im einzelnen darf man folgendes behaupten: Er leidet

1. an der Forderung frühester und möglichster Abstraktion,
2. an der Übertreibung der sprachlichen Übung,
3. an der Überfülle mechanischen Stoffs,
4. an der Vernachlässigung eigentlicher mathematischer Bildung und praktischer Anwendung.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen ist für viele ohne weiteres aus den Plänen und Lehrbeispielen zu ersehen. Andere finden sie durch die eigene Praxis bestätigt. Wer aber jenem noch nicht zuzustimmen vermag und über praktische Erfahrungen entsprechender Art nicht verfügt, dem sei das Studium der folgenden Darlegungen und ihr fortwährender Vergleich mit dem heutigen Stande der Sache empfohlen.

Nicht ein Erker oder eine Treppe oder ein Dachbalken unsers Gebäudes bedarf der Ausbesserung, das alles ist in keinem schlechten Zustande, und es wäre verlorne Mühe, an der Verbesserung kleiner und kleinster Ecken zu arbeiten. Nur ein **Neubau auf neuen Grundlagen** kann helfen. Ihn aufzuführen vermag freilich nicht ein einzelner, selbst nicht, wenn er auf der Vorarbeit vieler Vordermänner baute; das vermag nur die Gesamtheit der deutschen Erzieher. Aber sein Bild wollen wir malen, wie es uns vorschwebt und wie es in tausend stillen Stunden der Selbstprüfung und in abertausend Stunden heißen Studiums und in nochmals tausend Stunden praktischer Erprobung uns in immer klareren Zügen vor die Seele getreten ist.

Wir versuchen es darzustellen 1. in einer psychologischen Grundlegung, 2. in einer ihr und dem allgemeinen Erziehungsziel entsprechenden Zielsetzung, 3. in einem zweckmäßigeren Lehrverfahren, 4. in einem geeigneten Lehrplanentwurf, dem einige Lehrproben angefügt werden sollen.

[1]) Pestalozzis Forderung „formaler Bildung", Dörpfelds Bekämpfung des „Didaktischen Materialismus" sind nichts anderes. Man kann aber die Idee noch weiter zurückverfolgen. Die philanthropistische „Annehmlichkeit des Unterrichts" dagegen kann nur ein Unkundiger damit verwechseln.

Der Aufbau.

I. Teil: Die Grundlagen.

§ 6. Der Zahlbegriff.

Wenn wir die Behandlung irgendeines Schulgebiets untersuchen wollen, so müssen wir uns zunächst über den Gegenstand selbst völlig im klaren sein. Wer mit seinen Schülern Sprachlehre treiben will, muß wissen, welche Summe von Kenntnissen unter diesem Ausdrucke zusammengefaßt wird; und ebenso ist es bei Geographie, Geologie, Psychologie und in jedem anderen Gebiete. Wer Geographie und Geologie einerseits nicht auseinanderzuhalten, andererseits nicht die Beziehungen zwischen beiden sofort anzugeben weiß, wird keinen guten Geographieunterricht erteilen können; und wer Literatur und Sprachlehre in seinem Denken nicht reinlich geschieden hat, wird nur einen mangelhaften Deutschunterricht geben. Die möglichste Klarheit über den Bildungsstoff ist also eine ebenso notwendige wie selbstverständliche Voraussetzung für die pädagogische Behandlung. So ist es nötig, auch den Stoff des Rechenunterrichts zu betrachten.

Der Rechenunterricht hat es zunächst mit Zahlen zu tun. Das ist sein Stoff. Der Rechenlehrer muß darum ein möglichst hohes Verständnis für die Zahlen zu gewinnen suchen. Er muß z. B. Auskunft geben können auf die Frage: Was ist die Zahl? oder zunächst: Was ist eine Zahl?

Wenn sich irgendein gebildeter Mensch diese Frage vorlegt, so kommt er auch ohne psychologische Vorkenntnisse zu einer ganzen Reihe von Ergebnissen. Er verfährt so: Um die Frage zu beantworten, stelle ich mir irgendeine Zahl vor, sagen wir 4, und frage mich: Was ist eigentlich 4? Es ist bald klar, daß hier verschiedene Antworten möglich sind. Zunächst die: 4 ist ein Ding, das geschrieben wird, und zwar mit drei eigenartig gestalteten geraden oder wenig gebogenen Strichen, von denen der zweite und dritte einander kreuzen. Weiter findet aber auch folgende Erwägung

statt: 4 ist doch aber auch etwas, das ohne diese drei Striche bestehen kann, nämlich in der von ihnen gänzlich verschiedenen Form „vier“. Auch dies ist zwar ein Ding[1]), das geschrieben werden kann, jedoch völlig anders.

Jedes Denkergebnis muß nun einer doppelten Nachprüfung unterzogen werden: in bezug auf die gleichartigen Fälle und in bezug auf die anders gearteten. Mit anderen Worten: Jedes Urteil wird geprüft an den Tatsachen dadurch, daß man versucht, einerseits die verschiedenen Subjektsmöglichkeiten, andererseits irgendwelche ähnlich gearteten Fälle unter den Prädikatsbegriff zu stellen. In unserm Falle also: Paßt die obige Aussage, daß 4 ein Ding sei, das auf verschiedene Art geschrieben werden kann, auf alle Zahlen, auf 2, 9, 100 usw.? Das ist offenbar der Fall. Aber paßt sie nur auf die Zahlen? Oder gibt es vorhandene Dinge, die auf zweifache Weise geschrieben werden können? Dies letztere ist in hohem Maße der Fall. Man braucht sich nur zu erinnern an die Noten in der Musik, die als Punkte auf bestimmten Stellen eines bestimmten Notensystems erscheinen können, ebensogut aber auch als Buchstaben mit Strichbezeichnungen, wie endlich auch als ausgeschriebenes Wort.

Man erinnert sich weiter, daß es ja eigentlich nur auf verschiedene S c h r i f t a r t e n hinauskommt, ob etwas in zweifach oder mehrfach verschiedener Weise geschrieben werden könne. Man denkt an Druckschrift, an Stenographie, an die chinesische Silbenschrift, an die Morseschrift usw. Dies in Betracht ziehend könnte man die obige Erklärung für Zahl dahin abändern: Zahl ist ein Ding, das sowohl in Wortschrift (4) wie in Buchstaben- oder Lautschrift (vier) dargestellt werden kann. Was man freilich auf diese Art erklärt hat, gilt auch ähnlich von anderen Dingen, z. B. den erwähnten Noten. Auch trifft es wohl ein interessantes Merkmal, aber offenbar nicht den Kern der Sache.

Was ist also eine Vier, abgesehen von der schriftlichen Darstellung? Hier hilft uns zunächst der Gedanke weiter, daß alles Schriftliche ein Symbol ist für etwas anderes, für die Sprache, ein **räumliches Zeichen** für das **gesprochene, unräumliche Wort**. Demnach ist 4 eine Spracherscheinung, ein Wort, und die Zahlen sind im allgemeinen Wörter, z. B. fünf, siebenzig, tausend usf. Mit dieser Erkenntnis hat man schon einen bedeutenden Schritt vorwärts getan. Denn wenn man die Zahlen nur als Wörter auffassen gelernt hat, so sind sie eben etwas anderes als die Dinge selbst.

[1]) Ding in dem ganz allgemeinen Sinne von einer wahrnehmbaren selbständigen Einheit gebraucht im Gegensatz zu Eigenschaften usw.

Nun ist bei der Nachprüfung wieder zweierlei zu bemerken: Auch alle anderen „Dinge" erscheinen in der Form von Wörtern, und mit der Erklärung „Zahlen sind Zahlwörter" stehen wir gewissermaßen wieder am Anfange unserer Untersuchung. Und dennoch haben wir schon zwei wichtige Ergebnisse gewonnen, nämlich: Die Ziffer ist nicht die Zahl, d. h. ist nicht gleichbedeutend mit Zahl; das Zahlwort aber ist ebensowenig die Zahl, will sagen: erst hinter Ziffer und Zahlwort steht etwas, das wir eigentlich erst als Zahl bezeichnen dürften.

Ein weiteres Prüfen dieser Ergebnisse an der Wirklichkeit zeigt ihre Richtigkeit: die Zahl 4 bleibt die Zahl 4, ob ich sie mit dieser Ziffer oder mit der römischen Ziffer IV, oder stenographisch oder in Buchstaben, oder ob ich sie überhaupt nicht schreibe; ob ich sie in deutscher oder lateinischer oder in irgendeiner anderen Sprache ausspreche: Ziffer und Wort haben mit der Zahl an sich eigentlich wenig zu tun.

Dadurch sind wir aber in der Lage, die Frage genauer zu formen: Was ist die Zahl, abgesehen von Ziffer und Zahlwort? Hier gibt es anscheinend keine Möglichkeit des Fortschreitens. Fassen wir darum wieder den einzelnen Fall ins Auge: Was meinen wir, wenn wir „vier" sagen, oder was meinten die Römer, wenn sie „quattuor" sagten? Sie meinten 4 Bäume oder 4 Häuser oder 4 Geldstücke oder 4 Tage; aber man meint n i c h t diese D i n g e mit dem W o r t e vier; sollte das beabsichtigt sein, so würde man eben dem Worte vier die Namen dieser Dinge hinzufügen. Man meint etwas, was — wir wollen zunächst einmal diesen Ausdruck uns erlauben: was an den Dingen ist, an den Dingen sein kann. Dies Ergebnis halten wir fest mit dem ganz bestimmten Bewußtsein nur der annähernden, nicht der vollen, Richtigkeit.

Wenn wir nun weiter überlegen, was sonst noch an den Dingen sein kann, so ist es zunächst klar, daß wir unsere Aufmerksamkeit bei jenen Bäumen nicht auf Stämme, Äste und Blätter, bei den Häusern nicht auf Fenster, Türen und Schornsteine, bei Geldstücken nicht auf Vorder- und Rückseite richten dürfen. Denn alles dies sind T e i l e von Dingen und insofern wieder selbst Dinge. Wir können uns ein Blatt oder ein Fenster vorstellen ohne den Baum und das Haus.

Aber wir bemerken, daß die Bäume grün und hoch sind und eng beieinander stehen, und daß die Häuser weiß oder gelblich aussehen, daß das Glas glatt und das Eisen kalt ist: wir gelangen von den Dingen zu den E i g e n s c h a f t e n, die wir niemals vorstellen können ohne ein Ding. Dann fügen wir dem die weitere Beobachtung hinzu, daß die Blätter gelb werden und die Häuser grau und das Eisen gelegentlich auch heiß, daß also einzelne

dieser Eigenschaften wechseln. Damit gewinnen wir den Gedanken der zeitlichen Begrenztheit, der vorübergehenden Eigenschaft, des **Zustandes**; sodann — zumal wenn wir die Veränderung des Ortes hinzunehmen — den Gedanken der Erscheinung; endlich auch den der räumlichen Begrenztheit der Dinge.

Wir vergleichen nun die Zahlen mit alledem. Wir vergegenwärtigen uns das Rot der Mohnblüte, die Rundung ihrer Blütenblätter — dazwischen deren Vierzahl — dann die Erscheinungen des Abfallens, den Zusland, daß sie wächst oder daß sie vom Winde geschaukelt wird. Wir stellen uns vor den Glanz der Trompete, ihre Länge, ihren erregenden Ton, ihr Ruhen im Kasten, ihre Behandlung beim Gebrauch. Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf das Aussehen des Federhalters, mit dem wir schreiben, auf sein Alter, seine Dienste, seine Form, sein Gewicht — und zwar all das mit dem Bewußtsein der Frage: Finden wir in all diesen Beispielen etwas Ähnliches, wie die Zahl es ist? Und wir fühlen die Antwort, daß Erscheinungen und Zustände mit den Zahlen eine gewisse Ähnlichkeit zu haben scheinen, daß aber zwischen Eigenschaften und Zahlen eine stärkere Ähnlichkeit besteht. Ja, es gelingt uns sogar, die Stellen der größten Ähnlichkeit zu entdecken. Es sind ihrer zwei.

Indem wir bemerken, daß nicht alle Dinge rot oder gelb oder blau aussehen, werden wir uns dessen bewußt, daß alle Dinge eine **Farbe** haben; und daß es mit der **Form** oder der **Schwere** der Dinge ebenso ist. Auch die Zahlen erscheinen nur an den Dingen, in unendlichem Wechsel, aber in einer gewissen Anzahl erscheinen alle Dinge, keins ohne die Zahl, wie keins ohne die Farbe, Form usw. sein kann. So stehen die Zahlen den **allgemeinen Eigenschaften** der Dinge sehr nahe. Und dann das andere: Daß der Stengel lang oder kurz ist, die Blütenblätter dünn, das Schallrohr teils gerade, teils gebogen, der Ton ausgehalten, der Federhalter alt — auch diese Angaben scheinen den Zahlen viel näher zu stehen, als dies bei irgendeiner Farbe oder dem Geruch eines Dinges der Fall ist. Sie sagen gewissermaßen von dem Dinge etwas aus, was sich auch mit Zahlen ausdrücken ließe. Es sind die Eigenschaften der **Ausdehnung** und damit zusammenhängend die der räumlichen und zeitlichen **Begrenztheit**.

Damit sind wir zu folgendem Ergebnis gelangt: Wir unterscheiden die Zahlen von den Dingen, an denen allein sie freilich in der Wirklichkeit vorkommen. Wir unterscheiden sie von Erscheinungen, von den Zuständen und Eigenschaften der Dinge, können sie aber ganz in die Nähe gewisser Eigenschaften stellen, nämlich einerseits der allgemeinen, anderseits der der Ausdehnung.

Hier stehen wir wieder an einem Wendepunkte der Unter-

suchung. Um vorwärts zu kommen, wollen wir uns der Tatsache erinnern, daß unser gesamtes geistiges Leben seinen Ausdruck findet in der Sprache. Sie prägte für die Dinge Hauptwörter, für die Erscheinungen Zeitwörter, für die mehr dauernden Merkmale Eigenschaftswörter[1]). Hier erscheinen nun auch die Zahlwörter. Daneben noch Fürwörter, Geschlechtswörter, Umstandswörter, Verhältniswörter und Bindewörter, von den Ausrufen abgesehen. Da für sich allein doch nur Dinge (im weitesten Sinne) vorgestellt werden können, Erscheinungen und Merkmale aber — wie auch die Zahlen — nur an ihnen, so müssen sich auch die übrigen Wortarten an die Dinge selbst anschließen lassen oder an etwas ihnen schon Angeschlossenes. Die meisten Fürwörter treten ohne weiteres zu den Dingen als ihre Stellvertreter. Hinweisende Fürwörter und bestimmte Geschlechtswörter können den Eigenschaftswörten zugezählt werden; sie bezeichnen das Merkmal der Hervorhebung[2]). Umstandswörter passen als Merkmale der Erscheinungen zu den Zeitwörtern. So bleiben außer den Zahlwörtern noch Verhältniswörter und Bindewörter übrig. Ihnen gemeinsam ist, daß sie nie etwas von **einem** Dinge aussagen; sie fordern immer, daß zwei Dinge zusammen zu denken sind, und sie drücken das verschiedenartige Verhalten dieser beiden Dinge zueinander aus, ihre **Beziehung**[3]).

Man wird nicht leugnen können, daß die Zahlen auch mit diesen Beziehungsbegriffen eine gewisse Ähnlichkeit haben. Man könnte es als eine Art von Beziehung auffassen, die ich ausdrücke, wenn ich sage: Auf meinem Schreibtische stehen **zwei** Tintengläser. Würde ich nur das eine sehen, so würde ich mich nach dem andern umblicken. Und selbst die Bezeichnungen **eine** Uhr, **eine** Palme würden andeuten, daß eben eine solche Beziehung wie zwischen den beiden Tintengläsern in diesen Fällen nicht besteht. Während andererseits durch „vier" Stühle die Geselligkeit ihres Auftretens, eine gegenseitige Beziehung zueinander, kundgetan wird. Aber die Zahlen um dieser Ähnlichkeit willen zu den Beziehungsbegriffen zu rechnen — wie es tatsächlich von manchen Autoren geschehen

[1]) Selbstverständlich wollen diese Hinweise nur Andeutungen sein.

[2]) Bei den Geschlechtswörtern wenigstens in der ursprünglichen Bedeutung, heute noch bei Betonung.

[3]) Solche Beziehungen sind **örtlicher** Natur: über, unter, bei, neben; wo . . . **zeitlicher** Natur: nach, seit, während; als, sobald . . . und **kausaler** Natur, die sich gliedern in Beziehungen des **Grundes**: aus, wegen, kraft; denn, weil . . . des **Mittels**: mit, mittels, durch; indem, wie . . . des **Zweckes**: für, um, halben; daß, damit . . . der **Folge**: zufolge, infolge; deshalb, darum, also, somit . . . der **verneinten Erwartung**: ohne, sonder, statt, ungeachtet, trotz; aber, dennoch, jedoch, allein, indessen . . . der **Behinderung**: gegen, entgegen, wider; dagegen, demgegenüber . . . der **Einschränkung**: nur, allein . . . der **Bedingung**: wenn, ob . . .

ist — geht nicht an. Denn die Verschiedenheit zwischen beiden Begriffsarten ist doch größer als die Ähnlichkeit. Dabei trägt die Menge der so verschiedenartigen Beziehungsbegriffe doch einen durchaus einheitlichen Charakter. Endlich verhindert die Ähnlichkeit der Zahlbegriffe mit gewissen Eigenschaftsbegriffen eine Unterordnung unter die Beziehungsbegriffe. Denn diese beiden Begriffsarten sind durchaus unvereinbar.

Hiernach ordnen sich die Zahlen in folgender Weise ein: Dingbegriffe, Zustandsbegriffe, Eigenschaftsbegriffe, Zahlbegriffe und Beziehungsbegriffe. In dieser Reihe bilden sie eine Begriffswelt eigener Art, die Begriffe des Maßes.

Nach dieser Selbständigkeitserklärung können wir die Beziehungen der Zahlen mit den übrigen Begriffsarten noch enger knüpfen. Daß die Zahlen nur an Dingen und Erscheinungen vorkommen können, nicht für sich allein, erfährt hier eine neue Beleuchtung. Aber sie treten eben auch an ihnen nur in Erscheinung dort, wo irgend der Begriff des Maßes — der Anzahl, der räumlichen oder zeitlichen Ausdehnung — in Betracht kommt, also z. B. nicht bei den meisten Abstrakta — sechs Gerechtigkeiten gibt es nicht — wohl aber z. B. zwei verschiedene Höhen, die vier Lebensalter usf. Die Ähnlichkeit der Maßbegriffe mit den Eigenschaftsbegriffen wurde schon gezeigt. Hingewiesen sei noch auf die bekannten Beziehungen Qualität und Quantität, die viel weniger einen Gegensatz, als vielmehr eine enge Verwandtschaft andeuten, nämlich beides Denkformen der Dingbestimmung. Hingewiesen sei ferner auf die Kennzeichnung unserer Sinnesempfindungen und Gefühle nach Qualität und Intensität, wobei jener Ausdruck sich auf das Andersartige, dieser auf das verschiedene Ausmaß an sich gleichartiger psychischer Vorgänge bezieht. Sodann kann man die Geometrie als Mittelgebiet zwischen Eigenschafts- und Maßbegriffen heranziehen: ihre sämtlichen Elementarbegriffe (geradlinig, krumm, parallel usw.) gehören ins Gebiet der Eigenschaften, sie sind aber — wie schon „parallel" zeigt — ganz und gar von Maßbegriffen durchtränkt, jedenfalls in ihrer weiteren Entwicklung. Das Verhältnis der Zahlen zu den Eigenschaften spiegelt sich auch in der Sprache wieder, indem sie die Zahlwörter ganz ähnlich den Eigenschaftswörtern bildet und behandelt. Endlich kommt das Bewußtsein des Wertes der Dinge, der schon in der Steigerung der Eigenschaftswörter angedeutet ist, in den Zahlen zu einer gewissermaßen eigenen Ausdruckswelt.

Es ist einleuchtend, daß keins von beiden — Eigenschaftsbegriffe wie Zahlbegriffe — für die Erkenntnis der wirklichen Welt entbehrt werden kann, ja, daß nicht einmal das eine hinter das andere zurückgestellt werden darf.

Auch die Verwandtschaft der Maßbegriffe und der Beziehungsbegriffe ist schon berührt worden. Hier sei noch hingewiesen darauf, daß die Begriffsreihe immer abstrakter wird, d. h. der Abstand zwischen der Vorstellung, die in unserm Bewußtsein den betreffenden Begriff vertritt, und diesem Begriffe selbst wird immer größer[1]).

§ 7. Die Entwicklung der Sachbegriffe.

Ehe wir in der Betrachtung des Rechenstoffes fortfahren können, wird es nötig sein, uns die Entwicklung der ersten Zahlbegriffe zu vergegenwärtigen. Um aber dem Erzieher die Möglichkeit nicht nur der denkenden, sondern auch der erfahrungsgemäßen Nachprüfung zu geben, erscheint es zweckmäßig, zunächst kurz die Entwicklung der übrigen Begriffsarten, hauptsächlich die der Sachbegriffe darzulegen. Die Feststellungen, die hier gemacht werden können, dürften als willkommene Arbeitshypothese unsern Beobachtungen auf dem Gebiete der Zahlauffassung nur förderlich sein.

Einem wenige Monate alten Kinde erscheint ein dahinlaufender Hund als etwas Dunkles, das sich dahin bewegt, wobei die Bewegungen der Unterseite heftiger sind als die Gesamtbewegung. Es wird keinem Gebildeten schwer fallen, sich dies vorzustellen. Man braucht nur an den Fall zu denken, daß uns ein ähnliches Erlebnis bei Nebel begegnete[2]).

Diese Vorstellung des auf Beinen sich bewegenden Etwas — im Gegensatze beispielsweise zum rollenden Ball — wird nun vom Kinde wiederholt erlebt und mit jedem neuen Erlebnisse eine Wenigkeit klarer. Dann geschieht es wohl, daß die Mutter gleichzeitig das Wort Wauwau ausspricht. Auch dies wiederholt sich, und es bildet sich in dem kindlichen Geiste eine Assoziation zwischen jenem visuellen (mit dem Auge aufgenommenen) Vorstellungsge-

[1]) Man vergleiche daraufhin die Vorstellung Hund mit dem Dingbegriff Hund, die Vorstellung Sprung mit dem Zustandsbegriff Sprung — die Vorstellung zeigt dabei einen Menschen oder ein Tier; die Vorstellung niedrig mit dem Eigenschaftsbegriff niedrig — die Vorstellung zeigt ein Haus, eine Bank; die Vorstellung sieben mit dem Maßbegriff sieben — Bäume, Schwaben, Raben, Worte, Töne sind Dinge oder Erscheinungen; endlich stellen wir uns bei „über" zwei Dinge, bei „wegen" zwei Erscheinungen vor, aber wir wissen auch, daß die Vorstellung dieser Dinge allein — z. B. wenn wir sie zeichneten — in dem anderen (dem Beschauer) durchaus nicht den von uns gemeinten Beziehungsbegriff hervorrufen würde, wenn wir nicht eben sein sprachliches Zeichen benutzten. —

NB. Man möge es mir verzeihen, wenn ich diesen Abschnitt etwas ausführlicher gehalten habe, als es im Hinblicke auf viele meiner Leser nötig wäre. Ich sah unter diesen Lesern auch jüngere Lehrer vor mir, und da hat mich die Erfahrung gelehrt, daß es nicht zwecklos ist, ihnen eine Denkreihe mit ihren verschiedenen Arbeitstechniken und Fehlerquellen vorzuführen.

[2]) Wir kennen entsprechende Erlebnisse von sehendgewordenen Blindgebornen, die mit den Ergebnissen der Kinderbeobachtung ganz übereinstimmen.

bilde und dem Lautkomplex Wauwau, welche die Psychologie mit Komplikation bezeichnet. Damit ist nun eigentlich der Begriff des Hundes beim Kinde entstanden. Er ist in unserm Sinne völlig falsch. Denn eine unwesentliche Erscheinung, das Laufen, ist zum sachlichen Vorstellungsinhalt der Sach-Wort-Komplikation Wauwau geworden. Jenes unwesentliche Merkmal war aber gefühlsbetont und konnte darum zunächst die Bedeutung des alleinigen Sachinhalts gewinnen.

Nun ist es dem Kinde möglich, diesen Begriff in eigenartiger Weise zu übertragen — nicht auf den ruhenden Hund, sondern auf die laufende Katze, sogar auf das laufende Huhn; das letztere jedenfalls dann, wenn die Auffassung von der Vielzahl der Beine bei den bisherigen Erlebnissen mehr zurücktrat[1]). Dieses falsche Übertragen des Begriffs Wauwau auf andere Dinge erfolgt solange, bis bei einer oder der anderen dieser psychischen Erscheinungen ein anderes gefühlsbetontes Merkmal auftaucht, welches nun seinerseits das Vorstellungssubstrat für einen neuen Begriff bilden kann. So etwa beim Huhn das Flattern, bei der Katze das Klettern, bei Hund, Katze und Huhn die jedem dieser Tiere eigentümliche Stimme. Fortan erscheint das alte Merkmal zwar durchaus nicht beseitigt, aber doch mehr in den Hintergrund gedrängt, während das neue Merkmal den Begriffsinhalt vertritt. Je nach der in Betracht kommenden Erfahrung komplizieren sich beide Merkmale. Das neue behauptet sich nun immer solange, bis durch neue Erfahrungen neue Berichtigungen sich nötig machen. Merkmale nun, die augenscheinlich nicht mehr der Berichtigung bedürfen — z. B. daß ein Bleistift eine Graphitmine enthalte, daß eine Glocke eine bestimmte Gestalt habe — erscheinen uns als wesentliche Merkmale, und unter den ihrer Gesamtheit entsprechenden Bezeichnungen denken wir Begriffe, von denen wir behaupten, daß sie logisch, d. h. an dieser Stelle: einwandfrei sind. Wir nehmen dabei an, daß — weil bisher keine Erfahrung sie umgestaltete — sie auch künftig

[1]) Weitere Beispiele unserer Erfahrung sind folgende: Das Kind nennt jede erwachsene männliche Person Onkel, jede erwachsene weibliche bezeichnet es als Tante. Im Alter von noch nicht zwei Jahren leistete sich mein Sohn in einer Gartenwirtschaft zum Vergnügen der Anwesenden folgenden Satz, den er höchst bedächtig von sich gab: „Der (dieser) Wauwau hat weiße und fatze (schwarze) Federn.“ Federn hatte er an den Hühnern kennen gelernt, die er täglich beobachten konnte. Ein andermal leitete er seine Darlegungen ein mit den Worten: „Als ich noch ein Mädchen war . .“ In allen diesen Fällen vertritt ein unwesentliches Merkmal den Begriffsinhalt und bewirkt einen Gebrauch, der uns als ein Überschreiten der Begriffsgrenzen erscheint, und der dem nicht psychologisch Gebildeten nur lächerlich oder possierlich vorkommt. Dies Überschreiten der Grenzen ist aber gerade ein Beweis dafür, daß es sich um einen — wenn auch irrtümlich zu weit gefaßten — Begriff, nicht um die Assoziation einer Wortvorstellung mit einer bestimmten Sachvorstellung handelt, wie sie etwa in „Mama“ vorliegt.

sich behaupten werden, je daß sie unangreifbar sind. Sie erschöpfen gewissermaßen die uns zugängliche Erfahrung[1]).

Die weitere Entwicklung des Begriffes geht nun so vor sich, daß die Vorstellung, die wir bis dahin erlangt hatten, durch immer genauere Beobachtung zu immer größerer Klarheit und Deutlichkeit gelangt, aber immer mit dem Bewußtsein dafür, daß gewisse Merkmale sich als dauernd erwiesen haben, während andere — deren Zahl fortwährend wächst — als zufällig anzusehen sind und die Unterarten des Begriffs darstellen. Mit der zunehmenden Klarheit der Vorstellung geht also eine zunehmende Gliederung des Begriffs parallel.

Inzwischen hat aber neben dieser aufwärts schreitenden Bewegung der Entwicklung eine regressive, eine rückschreitende eingesetzt. Sie kreuzt erstere etwa an der Stelle, wo die Gesamtvorstellung ungefähr dem Begriffe entspricht, wo die Merkmale beider annähernd dieselben sind. Diese regressive Entwicklung läßt nun ganz allmählich, ohne daß in den meisten Fällen uns dies zum Bewußtsein kommt, die sinnliche Vorstellung immer schwächer werden und verblassen und setzt gleichzeitig das Wort an ihre Stelle als Symbol für den Begriff. Dabei erinnern wir uns, daß wir früher das Wort (z. B. Hund) mit der Gesamtvorstellung assoziierten, während wir es jetzt auf die Gesamtheit jener als wesentlich betrachteten Merkmale beziehen. So kommt es, daß Gesamtvorstellung und Begriffswort immer weiter auseinander treten, und daß wir ein Zusammenrücken beider nur dadurch ermöglichen können, daß wir dem Begriffswort noch eine Anzahl unwesentlicher Merkmale anfügen, z. B. dieser schwarze Dachshund, jener bräunlich-graue Hühnerhund usf. Die größere oder geringere Entfernung zwischen Vorstellung und Begriffswort (dem allgemeinen) kommt uns zum Bewußtsein im B e g r i f f s g e f ü h l. Es ist der Ausdruck dafür, daß wir innerlich einer Gleichsetzung von Gesamtvorstellung und Begriffswort nicht mehr zustimmen können, während diese Gleichsetzung an jenem Kreuzungspunkte noch als selbstverständlich und einzig möglich erschien. Bei entwickeltem Begriffsgefühl aber läuft — bildlich gesprochen — unsere Erinnerung mit außerordentlicher

[1]) Man kann die Vorstellung betrachten als ein psychisches Gebilde intellektueller Natur, dessen Einzelheiten durch räumliche und zeitliche Beziehungen zu einem Ganzen verbunden sind. Diese räumlichen und zeitlichen Beziehungen — z. B. die räumliche Reihenfolge der Teile — fallen beim Begriff hinweg; bei ihm handelt es sich nur um logische Beziehungen: ob ein Merkmal wesentlich ist oder nicht. Von den nicht wesentlichen sieht der Begriff grundsätzlich ab. Da nun unser Vorstellen an Raum und Zeit gebunden ist — wir stellen uns einen Hund immer in bestimmter Größe und Färbung vor, anders ist es uns unmöglich; aber Größe und Färbung sind für den Begriff unwesentlich — so können wir den Begriff überhaupt nicht v o r s t e l l e n, sondern wir können nur eine Synthese jener wesentlichen Merkmale uns d e n k e n, d. h. eine Abstraktion.

Geschwindigkeit und darum mit entsprechend geringem Energieaufwand an der ganzen Reihe der Gesamtvorstellungen hin, denen die mit dem Begriffswort assoziierten Merkmale zukommen (beim Worte Hund läuft sie an allen möglichen Hunden vorstellend vorbei) und bewirkt dabei das Bewußtsein, daß keine dieser Vorstellungen für sich allein dem Sinne des Begriffswortes gerecht werden kann.

Gleichwohl gibt es, wenn die Nötigung zum Vorstellen an uns herantritt, keine andere Möglichkeit, als eben eine beliebige Vorstellung herauszugreifen, z. B. einen bestimmten Hund vorzustellen. Diese Erscheinung ist es, welche die Psychologie in dem Satze ausdrückt, daß jedem Begriffsworte unsers Denkens eine Reihe von sachlichen, dinglichen Stellvertretungsvorstellungen zugeordnet sind[1]).

Man könnte nun geneigt sein, die Sachvorstellung anzusehen als eine niedere Stufe der Entwicklung, an deren Ende das abstrakte Denken steht (und sie demgemäß wesentlich geringer einzuschätzen als das rein begriffliche Denken). Tatsächlich werden solche Anschauungen vertreten von einem großen Teile derer, welche verbalistisch erzogen worden sind. Solche Ansichten werden aber der Wirklichkeit nicht im mindesten gerecht.

Denn was hier als Entwicklung schlechthin angesehen wird, ist nur die regressive Linie der Entwicklung, welche zu immer größerer Armut der Vorstellung und gleichzeitig zu immer vollkommener Abstraktion führt. Die andere Linie, die progressive, die unzweifelhaft schon früher einsetzt, bricht nun an jener Kreuzungsstelle, von der wir oben sprachen, nicht ab, sondern setzt sich fort zu immer größerer Klarheit und Deutlichkeit der Vorstellungen, zu immer vollkommnerer Konkretion.

Wohl ist zuzugeben, daß die Entwicklung des Denkens, die Entwicklung der Erkenntnis und aller der Werte, welche sich an die „Wissenschaft" angliedern, diesen Weg von der Vorstellung zum Begriffe geht. Aber gleichzeitig ist doch hervorzuheben, daß die „Erkenntnis" nie und nimmer einziges Ziel des Menschenlebens und der menschlichen Entwicklung sein kann, sondern daß ihr ein Gegenwert gegenübersteht, der gerade infolge seines vielseitig anschaulichen Charakters, der eben der Abstraktion so wenig zugänglich ist, mit den mannigfachsten Ausdrücken zu kennzeichnen versucht wird. So etwa, wenn man sagt, daß die Erkenntnis immer

---

[1]) Man kann auch das Wort selbst als Stellvertretungsvorstellung für den Begriff auffassen, und der Kulturmensch der Gegenwart zieht sogar das Schriftbild als Stellvertretungsvorstellung für den Begriff heran. Darum waren wir geneigt, die Zahl vier zunächst als Ziffer 4, als Schriftbild, dann als Wort aufzufassen. Darum kommt es vor, daß Kinder, die sich beispielweise eine Wüste vorstellen sollen, zur Schilderung ihrer Vorstellung veranlaßt, das Wort „Wüste" in die Luft malen. Diese künstliche Art der Stellvertretungsvorstellung kommt hier nicht in Betracht.

und immer wieder neue Kräfte suchen müsse aus dem Nährboden der Beobachtung (und der Intuition), daß das Denken zu ergänzen sei durch das Darstellen, das Wissen durch das Handeln, die Wissenschaft durch die Kunst, alle Einwirkung auf die Bildung der Psyche durch Auswirkung dieser gebildeten Psyche, der Gedanke durch die Tat, die Erkenntnis durch die Liebe usw.

Für alle diese Gebiete aber, welche die nach außen strahlende Richtung zeigen, kehrt sich das Wertverhältnis von Begriff und Vorstellung um: Während in den Gebieten der Erkenntnis die Gesamtvorstellung die grundlegende Bedeutung hat, und die Begriffe die der höchsten Entwicklungsform, haben in den Gebieten des Ausdrucks die Begriffe grundlegende Bedeutung, während die Gesamtvorstellung (in Konzeption wie Darstellung) die Höhe der Entwicklung vertritt.

Dazu noch ein Beispiel. Zwei Personen können beide, vielleicht gar auf gleichem Wege, zu derselben wertvollen Erkenntnis gelangt sein. Die eine gibt dieser Erkenntnis folgenden Ausdruck: „Buchweisheit taugt im Leben nichts; darum vermeide ich das Buchstudium und halte mich an die Wirklichkeit.“ Man sieht sofort: So fein die Erkenntnis ist, welche zu diesem Satze geführt hat, so unglücklich ist der Ausdruck. Er ist falsch und verletzend zugleich, und beides hat die Person nicht beabsichtigt, als sie ihrer Erkenntnis Ausdruck verlieh. Fragen wir nach den Ursachen, so erhalten wir die Antwort, daß es an den Begriffen Buchweisheit, Leben, Buchstudium, Wirklichkeit liegt. Sie werden nämlich von fast jedem mit einem anderen Inhalt erfüllt. Wie ganz anders, wenn man statt dieser allgemeinen Begriffe solche anwendet, die weniger allgemein sind: „Wenn man ein Buch liest und glaubt, dadurch das betreffende Gebiet beherrschen gelernt zu haben, so irrt man sich; das Lesen eines Buches muß vielmehr ununterbrochen begleitet und ergänzt werden durch das Betrachten der Dinge selbst und die eigentätige Arbeit an ihnen.“ In dieser Form hat der Gedanke sowohl das Falsche als auch das Verletzende des ersten Ausdrucks abgestreift. Aber noch erscheint er farblos, blutleer, und ist wenig geeignet, die gewonnene Erkenntnis zu verbreiten. Anders, wenn Gesamtvorstellungen eingeführt werden, z. B. „Wenn ich nicht gedienter Soldat gewesen bin und kaufe mir ein Buch über moderne Kriegführung, um sie daraus kennen zu lernen, so bin ich auch nach fleißigem Durchdenken noch nicht in der Lage, die Entschlüsse unserer Heerführer kritisch zu betrachten. Wollte ich mir dieses Können aneignen, so könnte ich das nur dadurch, daß ich den theoretischen und praktischen Bildungsgang eines Offiziers zurücklegte. Aber von der Art und Schwierigkeit der

Aufgabe ihres Berufs bekomme ich aus dem Buchstudium eine Ahnung, und mein Interesse wird lebhafter als früher auch den Einzelheiten der Kriegführung sich zuwenden." Oder: „Wenn ich als Erzieher meine Ansichten über Rechenunterricht lediglich einem Buche entnehmen wollte, das diesen Gegenstand behandelt, so kann ich leicht zu einer einseitigen oder irrtümlichen Auffassung gelangen; darum wähle ich für mein Studium möglichst ein Buch aus, welches gestattet, die darin vorgetragenen Gedanken sogleich in der Praxis des Unterrichts nachzuprüfen."

In solchem Sinne sagt Wundt: „Auch das abstrakte Denken hat in der Anschauung seine Quelle, und was in ihm von unmittelbarer Evidenz enthalten ist, das muß schließlich auf ein anschauliches Verhältnis zurückgeführt werden können." (Logik I, 2. A. S. 84.)

Nachdem so die Entwicklung der Sachbegriffe vorgeführt worden ist, genügt es, darauf hinzuweisen, daß bei den Zustands- und Qualitätsbegriffen die Entwicklung insofern noch einfacher sich gestaltet, als eben der Begriff von vornherein aus einem einzigen (oder wenigen) wesentlichen Merkmale besteht, das zunächst unklar, mit zunehmender Schärfe der Sinnesorgane und mit zunehmender Wiederholung immer klarer und deutlicher aufgefaßt wird, d. h. in seiner Eigenart und seiner Abgrenzung von anderen ähnlichen Erscheinungen immer besser unterschieden wird; so rot, süß, glatt, schwer, laufen, weinen, singen, fahren usf. Treten wir nun, so vorbereitet, an die Entwicklung der Zahlbegriffe heran.

§ 8. Die Entwicklung der ersten Zahlbegriffe.

Vier- bis fünfjährige Kinder können leicht dahin gebracht werden, daß sie bis 20 und noch viel weiter zählen lernen, wenn Eltern, Geschwister, sonstige Verwandte oder Dienstboten die Einübung dieser Wortreihe in die Hand nehmen. Aber selbst wenn die Reihe fehlerlos und völlig sicher abläuft, so sind doch ihr entsprechende Zahlbegriffe in der Regel nicht damit verbunden. Es dürften äußerst seltene Fälle ganz besonderer Beanlagung sein, verbunden mit sehr günstigen äußeren Umständen, wenn ein Kind dieses Alters über die Zahlbegriffe des ersten Hunderters wirklich verfügte[1]). Dagegen sind uns wiederholt Fälle vorgekommen, daß sechsjährige Kinder beim Eintritt in die Schule weder eine Vorstellung von 4 Dingen noch erst recht keinen Zahlbegriff 4 hatten, obwohl das eine von ihnen auch noch in Hausnummer 4 wohnte

[1]) Wobei darauf hinzuweisen ist, daß die allermeisten Eltern sich in solchen Feststellungen irren, weil sie nicht in ausreichendem Maße über die dazu gehörige psychologische und speziell fachliche Bildung verfügen.

und dies auf Befragen auch anzugeben wußte. Ein hübsches Beispiel, das geeignet ist, auch dem Nichtpädagogen Einblick zu verschaffen in die derzeitige Struktur der kindlichen Psyche, erzählt Otto Ernst: Ein kleiner Bube schaut zu, wie vor einem Neubau die Ziegelsteine abgeladen werden. Tausend mögen wohl in dem Haufen sein; aber er kann sich noch viel, viel mehr denken, „vielleicht gar hundert". Oder wenn unsere Kinder in der Schule oder im Hause das erstemal etwas von Millionen hören und ein besonders Interessierter wirft gar die Milliarde hinein, so möchte man staunen, wie dies alles, einschließlich Billionen, Trillionen und allen Tausendern lange Zeit durcheinander wirbelt, wenn man eben nicht wüßte, daß mit dem Zahlwort nie und nimmer der Zahlbegriff gegeben ist. Der muß erst erworben werden, und er wird gemeinhin erworben, nachdem das Zahlwort längst bekannt ist.

Diese Erfahrung ist ganz allgemein. Meumann stimmt ihr völlig zu. Das Zählen kleiner Kinder ist „ein mechanisches Erlernen einer fest assoziierten Wortreihe, das auch ohne jedes Verständnis für die Bedeutung der Zahlennamen stattfinden kann . . . Während sich bei einigen Kindern [bei Eintritt in die Schule] schon das Verständnis für die Zahlen 1 bis 6, bisweilen selbst von 1 bis 10 (und mehr) vorfindet, kommt die Mehrzahl nicht über die Kenntnis von 3 oder 4 hinaus, bei einigen scheinen selbst diese Zahlen zu fehlen". (Abriß der experimentellen Pädagogik, S. 378[1]).

Der erste Zahlbegriff, den ein kleines Kind entwickelt, ist eine g a n z u n b e s t i m m t e V o r s t e l l u n g e i n e r **Vielheit** von Dingen. Aber durchaus nicht etwa so, daß diese Vielheit sogleich bei ihrem ersten Auftreten bewußt würde, es muß vielmehr mit der Auffassung der Vielheit als solcher eine ganz besondere Gefühlsbetonung verbunden sein. Als mein Sohn fast zwei Jahre alt war, legten wir ihm eine Anzahl Rosinen aus dem Christstollen auf dem Tisch. Er war darüber so glücklich, daß er auf dem Sofa heftige Sprünge vollführte und vielfach die Worte wiederholte: „Ganze Reihe, Haufen, Masse!" Es war dies offenbar nicht der Anfang der Entwicklung von Zahlbegriffen. Denn indem schon ein einziger solcher Ausdruck an Gegenständen sinnlicher Auffassung (eine Reihe Soldaten, eine Reihe Bauklötzchen usf.) gelernt wird, ist ohne Zweifel schon der erste Zahlbegriff entstanden. Daß eine Mehrheit von solchen Ausdrücken — Reihe, Haufen, Masse — hier sinngemäß angewendet wurde, zeigt, daß die Entwicklung der Zahlbegriffe ihren Anfang schon wesentlich früher genommen hatte. — Daß nun der Begriff „viel" — gleichbedeutend mit den genannten Ausdrücken und solchen wie

[1]) Ähnlich in Vorlesungen, III., S. 638 ff.

eine Menge — auf jede beliebige Mehrheit angewendet wird und längere Zeit der einzige Zahlbegriff bleibt, über den ein Kind verfügt, das werden alle diejenigen Eltern bestätigen können, die daraufhin ihr Kind aufmerksam beobachten.

Einige Zeit später entwickelt sich ein zweiter Zahlbegriff, das „wenig", selten freilich gleich in dieser Form, sondern meist in der anderen: nicht viel. Diese Entwicklung erfolgt ganz und gar aus der kindlichen Interessensphäre heraus und zwar, — wie schon der anfängliche kindliche Ausdruck zeigt — im Gegensatz zum ersten Zahlbegriffe. „Nun ist es genug, du hast viel Rosinen bekommen!" „Nein, nis viel!"

Selbstverständlich ist die Entwicklung dieser beiden Zahlbegriffe nicht so zu verstehen, als wüchse das alles allein von innen heraus, ohne äußere Anregung. Vielmehr ist es die Umgebung des Kindes, welche so und so oft die Zahlbegriffe viel und wenig auf die Dinge der kindlichen Interessensphäre anwendet, vor allem auf Eßwaren und Spielsachen, aber auch auf Lichter, Soldaten und anderes Auffällige und Gefühlsbetonte. Dabei ist zu beachten, daß von dieser Umgebung gleichzeitig auch b e s t i m m t e Zahlbegriffe angewendet werden könnten neben den beiden genannten unbestimmten. Aber für die bestimmten würde das Kind dieser Stufe nicht das geringste Verständnis entwickeln: 4 Dinge kann es nicht von 5 gleichartigen Dingen unterscheiden, nur viel von wenig, und auch hier zunächst nur im gefühlsbetonten Gegensatz.

Als dritter Zahlbegriff erscheint wieder etwas später das „mehr", während die nächsten: weniger, zuviel, zuwenig — gemeinhin erst in größerem Abstande folgen.

Versuchen wir, uns die wesentlichen Merkmale dieser ersten Entwicklungsstufe der Zahlbegriffe klar zu machen, so gelangen wir zu folgenden Ergebnissen:

1. Es ist die Stufe des r o h e n V e r g l e i c h s, dem es gar nicht auf feinere Unterschiede ankommt, der nur grobe Unterschiede (ein paar, ein Haufen) in starker Gefühlsbetonung als mehr oder weniger angenehm erfaßt.

2. Eigenartig ist, daß auf dieser Stufe die Einheit (1) als Zahlbegriff noch gar nicht zum Bewußtsein kommt. Das Kind bemerkt wohl e i n e n Wauwau, e i n Hotto, aber nicht im Sinne der Betonung der bemerkten Anzahl, sondern mehr im Sinne unsers unbestimmten Geschlechtswortes, oder im Sinne eines bedeutungslosen Einschaltwortes, das es zunächst einfach dem Erwachsenen nachspricht. Die gesonderte Auffassung der einzelnen Dinge innerhalb einer Mehrzahl ist auf dieser ersten Stufe der Entwicklung noch nicht vorhanden.

3. Dazu kommt, daß die gewonnenen Begriffswörter an die

engste Interessensphäre des Kindes gebunden sind. So kennt es viel Rosinen, viel Lichter, viel „Teine" (Bausteine), viel Putput (Hühner), viel Kollern (Nüsse), aber es wendet das „viel" noch nicht an auf Bücher, Töpfe, Bäume, Äpfel usw., obgleich ihm diese Dinge nicht unbekannt sind und nach Vermutung der Angehörigen gerade durch die Menge ihres Vorhandenseins wirken müßten. Es wendet eben seine Zahlbegriffe noch nicht allgemein an, sie haften ihm noch an den Dingen, wo tatsächlich die Vielheit zum gefühlsbetonten Erlebnis ihm geworden ist. Seine Zahlbegriffe sind daher auch noch keine Abstraktionen, wie das bei unsern Zahlbegriffen der Fall ist. Sie sind ihm vielmehr lediglich Maßmerkmale der es interessierenden Dinge, die Vertretungsvorstellung wird noch vollkommen mit dem Begriffe identifiziert.

Auf Grund solcher Beobachtungen und der übrigen Feststellungen der psychologischen Wissenschaft sind wir nun in der Lage, uns ein noch weiter zurückreichendes Bild von der Entstehung der Zahlbegriffe zu machen, um so immer tiefer in ihr Wesen eindringen, ihr Wachstum fördern zu können.

Dies Bild läßt sich etwa so darstellen. Jedes seelische Erlebnis läßt nach dem Grade seiner Gefühlsbetontheit mehr oder weniger starke Spuren zurück.

Tritt nun ein ähnliches Erlebnis an das Kind heran, so gelangt es in der Spur des ihm entsprechenden ersten zu genauerer Auffassung. Gleichzeitig stellt sich ein leises Bewußtsein der Tatsache ein, daß dies seelische Erlebnis schon da war. Das Kind erlebt ein Bekanntheitsgefühl.

Gehen wir von unserer eigenen Erfahrung aus! Wenn wir auf der Straße das Charaktergesicht eines älteren weißbärtigen Herrn sehen, und wir begegnen ihm acht Tage darauf wieder, so erleben wir dies Bekanntheitsgefühl. Es ist die Gefühlsbegleitung einer dunkleren Vorstellung, der Tatsache nämlich, daß reproduktive Elemente gleichsam der neuen Wahrnehmung entgegenkommen. Wir haben dabei das Unterbewußtsein[1]), daß dem neuen seelischen Vorgange eine Bahn bereitet ist, daß ihm keine Hemmungen begegnen,

[1]) Wir möchten die Begriffe Bewußtsein, Bewußtheit und Unterbewußtsein in folgendem Sinne trennen: Bewußtsein als Gesamtheit der uns gegenwärtigen psychischen Vorgänge; Bewußtheit als einen psychischen Vorgang, dessen Bewußtwerden jederzeit im Bereiche unseres Willens liegt: Ich kann die 6. Potenz von 4 rasch ausrechnen, ich kann schwimmen, ich kann die Bergpredigt, die Glocke, ich weiß auf minder schwierige Fragen der Physik und Biologie Antwort zu geben, ich kenne Schuberts Erlkönig, die Neunte, viele klassische und moderne Dramen usw. Unterbewußtsein als psychische Vorgänge, die sich nur dem Blicke des geschulten psychologischen Beobachters offenbaren. Man könnte die drei Formen auch so gliedern: volles Bewußtsein mit dem Gefühl der Tätigkeit, zurückgedrängtes Bewußtsein mit dem Potenzgefühl des Besitzes; geschwächtes Bewußtsein mit dem Begleitgefühl der jeweilig unterbewußten Vorstellung.

wie manch anderen Vorgängen, daß eine gewisse Leichtigkeit der Auffassung in diesem Falle besteht.

Ähnliches erlebt das kleine Kind, das zum ersten und zum zweiten Male den brennenden Christbaum sieht. Sein Verhalten ist im letzteren Falle nicht unwesentlich verändert: die Überraschung des ersten Males hat sich schon beträchtlich gelegt, der Freudenerguß tritt früher ein. Aber auch jedes anders geartete seelische Erlebnis, das wiederkehrt, entfaltet die angegebenen Wirkungen, und zwar beim Kinde wie auch beim Erwachsenen. Wir sehen eine Quecksilberlampe das erste- und das zweitemal; wir hören einen Autoreifen knallen das erste-, das zweitemal; wir sehen ein Stück Kreide und am folgenden Tage nochmals usw. Die große Menge dieser psychischen Vorgänge gliedert die psychologische Wissenschaft je nach der besonderen Struktur des Einzelfalles in Assimilationen, Wiedererkennungs- und Erkennungsvorgänge. Sie macht auch darauf aufmerksam, daß bei sehr häufiger Wiederholung — z. B. beim Anblick der Gebrauchsgegenstände des täglichen Lebens — das Bekanntheitsgefühl immer schwächer wird und ganz verschwindet, eine Erscheinung, die sich auch auf anderen Gebieten zeigt.

Der Blick auf diese Abschwächung des Bekanntheitsgefühls lenkt unser Augenmerk auch auf die entgegengesetzte Erscheinung seines allmählichen Wachsens. Wir begegnen auf unserm Schulwege einer Anzahl fremder Leute, die ihrer Berufsarbeit zueilen. Keinen von diesen würden wir beim zweiten Anblick kennen, beim hundertsten Male aber kennen wir ihrer eine ganze Reihe. In sehr vielen Fällen tritt eben das Bekanntheitsgefühl nicht plötzlich und stark auf, sondern so klein und schwach, daß es unter der Menge der übrigen Eindrücke völlig verschwindet. Es entwickelt sich langsam infolge der Wiederholung und gewinnt allmählich an Stärke, bis es gelegentlich uns zum Bewußtsein kommt. So spielt sich der Vorgang überall dort ab, wo die Gefühlsbetonung der einzelnen Eindrücke sehr schwach ist. Beide Entwicklungsreihen vereinigen sich meist in dem Sinne, daß das Bekanntheitsgefühl erst infolge der Wiederholung bis zu einem an sich geringen Höchstwert steigt und dann wieder absinkt.

Die Stärke des ersten Bekanntheitsgefühls, welches also die erste Wiederkehr des betreffenden psychischen Erlebnisses begleitet, hängt ab von zwei Faktoren, einem fördernden und einem hemmenden. Jener besteht in der Gefühlsbetontheit des ersten Erlebnisses: Wir begegnen einer Schar Kinder, die aus der Schule kommt. Zwei unter ihnen fallen uns auf durch ihre ausgelassene Heiterkeit. Wenn wir acht Tage später denselben Kindern begegnen, so kennen wir die beiden noch, die übrigen aber nicht. — Als

hemmender Faktor aber kommt in Betracht die Länge der Zwischenzeit und die Art und der Grad ihrer Ausfüllung: Eine längere Zwischenzeit kann uns das Wiedererkennen ganz unmöglich machen, die Spur ist völlig verwischt, ein Bekanntheitsgefühl tritt nicht ein. Dieselbe Wirkung auf die Spur hat es, wenn die Zwischenzeit mit vielen ähnlichen Erlebnissen ausgefüllt war, entgegengesetzte erhalten sie; und starke Ausfüllung verwischt mehr als geringe.

Am stärksten ist daher dann das Bekanntheitsgefühl, wenn ein gefühlsbetontes Erlebnis unmittelbar nach seinem ersten Auftreten wiederkehrt, allgemeiner: wenn gefühlsbetonte gleichartige Erlebnisse unmittelbar aufeinander folgen.

Durch das enge Benachbartsein gleichartiger Eindrücke bekommt das Bekanntheitsgefühl aber auch noch eine qualitative Färbung: Es ist etwas anderes, ob es in uns verhältnismäßig langsam auftaucht, oder ob es begleitet ist von dem Unterbewußtsein, daß inzwischen eigentlich keine anderen psychischen Vorgänge erlebt wurden. So etwa, wenn wir eine schöne Libelle sehen, die unseren Blicken entschwindet und gleich darauf wieder erscheint[1]). Dieses seinem Wesen nach etwas veränderte Bekanntheitsgefühl sondert sich nun auch noch deutlich in zwei verschiedene Formen, je nach den in Betracht kommenden Begleiterscheinungen. Sie veranschaulicht folgendes Beispiel. Ein Redner habe uns während eines Vortrags ein bestimmtes Lichtbild gezeigt. Er verdunkelt den Schirm und hebt darauf die Klappe des Apparats wieder, und es erscheint — dasselbe Bild. Dann tritt (ganz abgesehen von irgendwelchen Gefühlen erfüllter oder unerfüllter Erwartung) das Bekanntheitsgefühl auf. Ganz anders freilich, wenn er das Bild aus dem Projektionsapparat herausnehmen und ein neues, ein anderes einschieben läßt. Wenn auch jetzt wieder das soeben gesehene Bild erscheint, dann ist zwar auch wieder das Bekanntheitsgefühl da, aber in ganz anderer Ausprägung. In jenem ersten Falle hatte sich zu dem Bekanntheitsgefühl ein Identitätsbewußtsein gesellt[2]), in diesem das Bewußtsein des Wechsels des Reizsubjekts.

Das heißt also: bei unmittelbarer Aufeinanderfolge gleichartiger psychischer Erlebnisse gewinnt eine der beiden intellektuellen Komponenten besonderes Gewicht, die der Identität oder die des Reizwechsels. Jenes Libellenbeispiel würde zu dem ersten Falle passen, wenn wir glaubten, es sei beim zweiten Erscheinen dieselbe ge-

[1]) In diesem Falle ist der erste Vorgang gewissermaßen noch im Blickfelde des Bewußtseins, wenn auch in seinem dunkleren Teile, während der zweite bereits in das Blickfeld eintritt.

[2]) Dabei haben wir das Bewußtsein, daß die Wahrnehmung von vorhin eigentlich nur unterbrochen war, jetzt also nur fortgesetzt wird.

wesen, die wir das erstemal sahen; es würde den zweiten Fall erläutern, wenn wir dächten, jene erste hätte doch eine andere Richtung eingeschlagen, so daß diese also eine zweite, ihr genau gleiche sei. Beispiele für diese Form sind noch die folgenden: Wenn wir die Augen von dem einen Turme einer gotischen Kirche nach dem anderen ganz gleichen hinüberwenden, also der Veränderung der Blicklinie uns bewußt sind. Wenn ein Stück Gebäck auf unserem Teller lag, von dem wir wissen, daß wir es gegessen haben, und wir finden beim Hinblicken wieder ein gleiches darauf.

Bei zeitlichen Erscheinungen, wie Glockentönen, sind wir schon völlig daran gewöhnt, daß der zweite ein neues Reizsubjekt darstellt, daß der erste nicht nochmals erscheinen kann. Aber bei räumlichen Erscheinungen ist es anders. Da unterscheiden wir durchaus das Bekanntheitsgefühl mit dem Identitätsbewußtsein von dem Bekanntheitsgefühl mit dem Reizwechselbewußtsein. Später überträgt sich freilich auch dieses auf jenes. Nur gilt es dann nicht dem objektivierten Reiz, sondern dem subjektiven Erlebnis.

Das Bekanntheitsgefühl mit dem Reizwechselbewußtsein ist nun die Grundlage für die Entstehung der Zahlbegriffe.

Zur weiteren Klärung dieser Sachlage müssen wir den Blick noch richten auf zwei apperzeptive Tätigkeiten, die dabei in Betracht kommen, das Vergleichen und das Zusammenfassen.

Das Vergleichen besteht im Feststellen der Übereinstimmung und der Unterschiede. Es erfolgt zunächst ganz mechanisch-physiologisch. Es wird intuitiv geübt, und sein Ergebnis kommt im Bekanntheitsgefühle zum Ausdruck, wie das weiter oben dargelegt worden ist. In der frühen Kindheit kommt es in der größten Zahl der Fälle zu dem Ergebnis „gleich". Die Linie dieser Entwicklung läuft aber beständig abwärts, weil wir mit fortschreitender Wahrnehmung und Beobachtungsfähigkeit immer mehr zunächst gröbere, dann immer feinere Unterschiede kennen lernen. Auf der Stufe des psychischen Lebens, die unserer näheren Betrachtung unterliegt, ist es nun noch sehr schwach ausgebildet — wir sprachen oben von der Stufe des rohen Vergleichs. Immerhin muß es eine gewisse Stufe der Entwicklung schon erreicht haben, ehe die primitivsten Zahlbegriffe gebildet werden. Diese Stufe wird dadurch gekennzeichnet, daß das Vergleichen sich gegliedert hat in qualitatives und quantitatives, in urteilendes (im engeren Sinne) und messendes Vergleichen. Nun ist nämlich die Aufmerksamkeit in der Lage, sich einem besonderen Merkmalsgebiete zuzuwenden und gleichzeitig von den übrigen mehr abzusehen. Wir besinnen uns hier auf folgende Erlebnisse. Ein Kind unterschied im zweiten Jahre guter Wauwau — alter Wauwau (alter im Sinne von böser, weil er es an-

gebellt hatte), fatze (schwarze) Putput — weiße Putput, Böde (große) Bibi (Puppe) — dleine Bibi, Weg — Hänsenweg (Hänschenweg, ein schmaler Fußpfad, der neben der Landstraße herlief). Das urteilende Vergleichen konnte damit schon absehen von Farbe, Größe, Gestalt usw., das messende von Farbe, Zweck, Beliebtheit usf.[1]). Damit ist das Vergleichen auf einer Stufe der Ausbildung angelangt, wo die Aufmerksamkeit sich bereits zu konzentrieren gelernt hat auf das Merkmal der Ausdehnung. Nach unserer Erinnerung läuft die Entwicklung des Vergleichens übrigens ziemlich parallel dem allmählichen Erwachen des Reizwechselbewußtseins[2]).

Der analytischen Tätigkeit des Vergleichens muß sich nun die synthetische Tätigkeit des Zusammenfassens zugesellen, damit Zahlbegriffe sich bilden können.

Was sich als ungleich erweist — in unserer Auffassung natürlich, die ja irren kann — fassen wir nicht zusammen, sondern nur, was uns als gleich vorkommt. So ist das Kind viel mehr dem Zusammenfassen geneigt als der Erwachsene. Es begegnet aber einer nur im Laufe der Jahre zu überwindenden Schwierigkeit darin, daß sein Bewußtseinsumfang noch außerordentlich gering ist[3]). Darum ist die früheste Möglichkeit des Zusammenfassens nur bei unmittelbarer Aufeinanderfolge der Eindrücke gegeben. In dieser Weise umfaßt das kindliche Bewußtsein eine Anzahl Bauklötzchen, mit denen es spielt — im Baukasten mögen noch mehr sein, sogar unmittelbar neben seinem Spielplatz; diese hat es „vergessen", wenn es durch irgendeinen Umstand von ihnen abgelenkt wird. So umfaßt es die Rosinen, über die sein Blick nach und nach gleitet; so die Lichter, wenn die Straßenlaternen angezündet werden: ein Licht! . . . ein Licht! . . . (das hat für das Kind keine Zahlbedeutung!) viele Lichter! Dabei sind es vielleicht erst drei oder vier, aber auf die Zahl kommt

[1]) Daß von Farbe anscheinend leicht abstrahiert wird, dürfte wohl besser so zu erklären sein, daß in jener Lebenszeit die Farbe als solche überhaupt noch nicht zum Bewußtsein kommt.

[2]) Hier ist eine Stelle, wo die Kinderforschung nachdrücklich einzusetzen hätte.

[3]) Wollte man sagen: die Ausdrücke „es kann nicht zusammenfassen" und „sein Bewußtseinsumfang ist gering" sind nur andere Bezeichnungen desselben Tatbestandes, so würde die Erklärung lauten: die Intensität seiner Aufmerksamkeit ist noch so schwach, daß sie nur zur Beleuchtung des im Blickpunkt stehenden Eindrucks ausreicht, während die im übrigen Blickfelde befindlichen kaum mehr als gefühlsmäßig wirken und rascher als beim Erwachsenen unterbewußt werden. Ein schlagendes Beispiel auf anderem Gebiete erleben wir fast jede Woche. Achtjährige Kinder — auch schwächere zehnjährige noch — sind vielfach noch nicht imstande, zwei selbstgeschriebene unmittelbar aufeinander folgende Sätze im Bewußtsein zu behalten. Während sie den zweiten bilden und niederschreiben, ist der erste fast völlig vergessen. Man sieht das an dem Wiederkehren derselben Wendung zweimal und öfter hintereinander. Wenn man ein solches Kind veranlaßt, seine Sätze laut vorzulesen, gelingt ein solches unmittelbares Behalten schon besser. Das äußert sich darin, daß das Kind sagt: Hier klingts nicht hübsch, das hätte ich anders schreiben sollen.

es ja nicht an, sondern daß das Kind imstande ist, sie alle auf einmal aufzufassen. Dies Bewußtwerden verläuft — wie schon die Beispiele zeigen — zunächst in zeitlicher Aufeinanderfolge; diese verkürzt sich nun nach und nach so, daß das Erlebnis als ein augenblickliches erscheint, aus dem sukzessiven Bewußtwerden ist ein simultanes geworden [1]). Auch die Forderung des Benachbartseins fällt mit fortschreitender Entwicklung mehr und mehr weg, und es bleibt für das Zusammenfassen nur das Motiv der Gleichartigkeit übrig, und zwar in immer abstrakterer Ausprägung.

Diesem qualitativen Auswahlmotiv tritt nun ein quantitatives an die Seite. Wieviel auf einmal zusammenzufassen ist, das scheint — abgesehen von dem Umfang des Bewußtseins — in dem Vorhandensein der betreffenden Erscheinung gegeben zu sein, wie die Beispiele von den Rosinen und Lichtern es uns nahe legen. Das ist aber lange nicht in dem Grade der Fall, wie der Erwachsene es annehmen möchte, dessen Blick auch über die Grenzen des Gegebenen hinausgleitet und die Tatsache der Begrenzung an gewissen Stellen und damit Anfang und Ende des Zusammenzufassenden feststellt. Wollen wir die davon abweichende Auffassungsweise des Kindes verstehen, so kann dies leicht geschehen, wenn wir uns an eine ähnliche Erscheinung aus dem Leben des Erwachsenen erinnern: Wir können das Ticken der Wanduhr mit voller Aufmerksamkeit auffassen, es kommt doch nicht eher zu einer Zahl, bis wir uns entschließen, aus dieser Reihe gewissermaßen ein Stück herauszuschneiden, es willkürlich abzugrenzen und es von Anfang bis zum Ende im Bewußtsein zu halten versuchen, beispielsweise, wenn wir beachten, wieviel Schläge zu hören sind, während wir um den Tisch herumgehen oder eine Tasse Tee ausgetrunken haben. Dem Kinde geht es aber auch noch mit räumlichen Eindrücken so. Selbst wenn es schon „zählen" gelernt hat, zählt es Fenster, Bäume, Früchte, Blumen und sonst etwas, indem es bei einem willkürlich gewählten Stück anfängt. In früherem Alter fällt diese willkürliche Begrenzung des Zusammenzufassenden noch mehr in die Augen, indem es anscheinend wahllos zusammenfaßt und die benachbarten Stücke liegen läßt, trotzdem sie seiner Auffassung nicht entgangen waren. So, wenn es z. B. zu dem freudigen Ausruf „viel Teine" (Bausteine) gelangt, obwohl nur 6—10 vor ihm liegen und noch eine Anzahl kaum mehr als 1/4 Meter davon, die es wohl sieht, aber nicht meint. Gerade der psychische Vorgang der eigenmächtigen Begrenzung in den Fällen, da die Objekte nicht selbst schon isoliert

[1]) „Je häufiger bestimmte Vorstellungen sich vereinigt finden, um so rascher überfliegt die Apperzeption dieselben, bis sie endlich in einem simultanen Vorstellungsakte erfaßt, was vorher in eine größere Zahl sukzessiver Vorstellungen getrennt war." Wundt, Logik I, S. 39.

erscheinen, ist nun ein Fingerzeig dafür, daß in dem Zusammen-

umfang noch zu gering ist, das andere darin, daß symbolische Stellvertretungsvorstellungen, wie sie uns in den Zahlwörtern (und später in den Ziffern) gegeben sind, noch nicht zur Verfügung stehen. Wohl war dies zweite Hindernis den Meistern des Rechenunterrichts seit langer Zeit schon bekannt, und durch unablässige Übung von Zahlwort und Ziffer suchten sie es zu überwinden. Aber ihr Bemühen war vergeblich, weil das erste jener beiden Hindernisse die größere Bedeutung hat und zuerst beseitigt werden muß. Hier aber läßt sich die Natur nichts abtrotzen, vor allem nicht von solchen, die ihre Gesetze nicht ausreichend beachten.

Die heutige Pädagogik hat nun die Kenntnis der Naturgesetze, d. h. hier der Tatsachen der Kinderpsychologie, zu ihrer Richtschnur gemacht. Die dahin gehenden Untersuchungen zeigten, daß der Aufmerksamkeitsumfang des Erwachsenen schon bei sechs unverbundenen Elementen seine obere Grenze erreicht, während vorschulpflichtige Kinder nicht über vier hinauskommen. In diesem Raume — also bis zur vier — bewegen sich nun die ersten bestimmten Zahlvorstellungen[1]), die das Kind erwirbt; in diesem Raume auch die ersten Zahlwörter, die es sinnvoll anwenden lernt, im besonderen auch das Zahlwort eins.

Man hat heftig darüber gestritten, ob die Gewinnung der Grundzahlen 2, 3, 4 usw. oder der Ordnungszahlen der 2., 3., 4. usf. vorangehe. Man hat wohl darauf hingewiesen, daß unsere Kinder fast ohne Ausnahme diese Zahlwörter von Eltern oder älteren Geschwistern lernten; und daß die Anleitung — wenn sie überhaupt über das bloße Vorsagen der Zahlwörter hinauskommt — darin besteht, die Kleinen zu veranlassen, beim Aussprechen jedes einzelnen Zahlworts mit dem Finger auf einen Gegenstand einer vorhandenen Reihe zu tippen. Weil nun bei jedem Zahlworte nur auf einen Gegenstand gezeigt werde, lernten die Kinder nicht vier als Gesamtheit von vier Einheiten kennen, sondern als einen Gegenstand, dem drei andere vorangingen.

Wir glauben, daß man sich über diese Frage beruhigen darf. Sie hat wenig theoretischen[2]), gar keinen praktischen Wert. Es sind uns genug Kinder begegnet, die im Alter von sechs Jahren wohl Zahlwörter, aber keine Zahlvorstellungen hatten. Aber Kinder, die mit den Zahlwörtern lediglich den Sinn der Ordnungszahlen

---

[1]) Vergl. hierzu die Ausführungen über Zahlvorstellung und Zahlbegriff S. 71ff.

[2]) Man könnte meinen, der Streit zwischen den methodischen Richtungen der Zähler und Anschauer werde durch die einwandfreie Beantwortung dieser Frage entschieden. Das ist aber ein Irrtum. Das Wesen dieser beiden Richtungen tritt in Gegensatz zu einander eigentlich erst auf dem Gebiete der Zahlvorstellungen von 5 bis 12, wo jene die sukzessive, diese die simultane Auffassung empfehlen. Um Ordnungszahlen handelt es sich bei keiner der beiden Richtungen. Vergl. dazu die späteren Ausführungen über diesen Gegensatz.

verbunden hätten, sind uns noch nicht vorgekommen. Das bedeutet natürlich nicht, daß dieser Fall nicht eintreten könnte — man kann ihn bei besonders interessierten Eltern und schwachen oder mechanisch gewöhnten Kindern wohl für möglich halten; es bedeutet aber, daß er sich in kürzester Zeit selbst ergänzt, berichtigt, verbessert, zumal bei rechter Behandlung, die eben auf das Zusammenfassen achtet, und die später noch dargelegt werden soll.

Die natürliche Entwicklung führt nicht in erster Linie auf die Ordnungszahlen, sie geht einen andern Gang. Sie lehrt das Kind zwei Dinge kennen, etwa die zwei Pferdchen eines Knaben, die zwei Puppen eines Mädchens, auch ohne daß das Zahlwort mit gelernt wird. Aber der Eindruck muß gefühlsbetont sein, und zwar nicht nur der Eindruck des einzelnen Dinges, sondern ihrer Anzahl. Wo das nicht der Fall ist, bleibt dieser abstrahierende Blick auf das Ausmaß der Erscheinung noch aus. Darum werden in einem gewissen Stadium der Entwicklung vom kleinen Kinde nicht unterschieden zwei Betten und drei Betten, zwei Fenster und drei Fenster, zwei Blumenstöcke und drei, zwei Schlüssel, Pfennige usw. und drei. Und bei Rosinen und derartigen Dingen ist zwei wohl lustbetont. Wenn aber die Erfahrung viele schon mehrfach gemacht worden ist, dann ist die Gefühlsbetontheit von zwei wesentlich geringer; dann erscheint zwei dem Kinde so, wie wir von „ein paar" sprechen, d. h. als wenige, nicht aber als eins und eins. Daraus geht hervor, daß auch diese ersten bestimmten Zahlbegriffe an gefühlsstarken Vorstellungen gewonnen werden und zunächst gar nicht von ihnen losgelöst werden können.

Dazu kommt noch ein anderes; der Vorgang ist ähnlich wie bei Gewinnung der unbestimmten Zahlbegriffe: die latente Zahlvorstellung zwei, bezogen auf die beiden Pferdchen des Kindes, verharrt — mit oder ohne Zahlwort, darauf kommt es weniger an — in dieser Form so lange, bis eine eigenartige neue Erfahrung an das Kind herantritt, die des Kontrastes: Bloß ein Hotto! Bloß eine Puppe! ... Im Kontrast zu zwei lernt das Kind die bestimmte Zahl eins, im Kontrast zu eins gewinnt wiederum zwei ganz erheblich an Klarheit.

Mit diesen Ausführungen soll nun freilich nicht der Satz vertreten werden, die Reihenfolge der Zahlbegriffe, die das Kind erwirbt, sei 2, 1, 3, 4. Das richtet sich vielmehr ganz nach den Verhältnissen, in denen das Kind aufwächst, besser: nach den gefühlsbetonten Vorstellungen. Ein kleiner Knabe, der in der Zeit dieser Entwicklung mit drei Soldaten spielt, wird neben den unbestimmten Begriffen viel, wenig usw. zuerst den bestimmten Begriff der drei bilden. Zwei sind ihm zunächst nur wenig oder nicht viel, eins

auch; er sucht dann und sucht, bis er seine drei Soldaten hat. Von dieser Zahlvorstellung aus gewinnt er die anderen.

Es ist darum auch ein Irrtum, zu meinen, daß Kinder auf dieser Entwicklungsstufe zum Zählen veranlaßt würden, wenn man ihnen reiche Gelegenheit dazu gäbe. Fast möchte man sagen, das Gegenteil sei richtig. Das Kind, das 20 Soldaten bekommt, stellt sie wohl auf, merkt aber noch nicht, ob ihm an den 20 einer fehlt oder zwei[1]. Es hat auch gar kein Interesse daran, das festzustellen, es hat ja „viele". Will man die Entwicklung bestimmter Zahlvorstellungen fördern, so bleibt gar nichts übrig, als die Anzahl der für das Kind gefühlsbetonten Dinge auf vier oder gar auf zwei oder drei zunächst zu beschränken.

Rückblickend bemerken wir zuerst die Stufe des rohen Vergleichs, die eine Anzahl unbestimmte Zahlbegriffe gewinnt, weiterhin jedoch einer selbständigen Entwicklung fähig ist. Aber ehe es dazu kommt, wird sie überlagert von einer zweiten Stufe, welche durch ihre Erwerbung des Einswertes gekennzeichnet ist als Stufe des genaueren Vergleichs, wenn auch zunächst nur innerhalb des dem Kinde möglichen Aufmerksamkeitsumfangs. Gemeinsam ist beiden Stufen, daß die erworbenen Zahlbegriffe noch vollkommen an Sachvorstellungen geknüpft sind, welche für das Interesse des Kindes besondere Bedeutung haben.

§ 10. Die Erwerbung der Zahlbegriffe der Reihe.[2]

Die folgende Stufe, die zeitlich allgemein erst in die Schuljahre fällt, umfaßt die Gewinnung der Zahlbegriffe von 5 an. Sie endigt **nicht** mit 10 oder 12 oder 20, wie die landläufige Didaktik behauptet. Denn ob das Kind den Zahlbegriff 11 kennen lernt oder 19 oder 24, ist hinsichtlich der psychologischen Struktur dieser Erscheinung völlig gleich. Und wer Kinder beobachtet hat, der hat wohl auch jederzeit von ihren Gesichtern — wenigstens von denen der intelligenteren — die Frage abgelesen: Ich kann bis 100 zählen, warum darf ich nur bis 10 rechnen? Diese Entwicklungsstufe reicht sogar in den meisten Fällen noch über die 100 hinaus, nämlich dann, wenn das Kind derartige Zahlvorstellungen bildet,

[1]) Die Entwicklungsstufe, daß das Kind eine Doppelreihung vornimmt, und daraufhin grade und ungrade bemerkt, liegt im allgemeinen später, als die hier in Betracht kommende Zeit.

[2]) Wenn wir in diesem Abschnitte, der von den Grundlagen handelt, von „Erwerbung" sprechen, so ist das nicht didaktisch gemeint, sondern psychologisch. Nicht wie die Erwerbung am wirksamsten zu unterstützen wäre, wollen wir hier ausführen, sondern wie sie sich tatsächlich abspielt, und zwar ohne Bezugnahme auf unterrichtliche Beeinflussung, ja sogar auch im Gegensatz zu ihr.

Zahlbegriffe erwirbt, ohne schon ein Bewußtsein von der Art und Wirkungsweise des Dezimalsystems erlangt zu haben.

Diese Entwicklungsstufe ist es nun, welche die Masse der für das bürgerliche Rechnen nötigsten und gebräuchlichsten Zahlbegriffe herbeiführt, die freilich wegen der zunehmenden Schwierigkeit, sie zu überschauen, den Charakter von Bewußtheiten annehmen mit Hilfe der Zahlwörter. Außer diesem sehr reichen Materialerwerb, der diese Stufe kennzeichnet, ist ihr schon am Anfang ihrer Ausbildung noch ein formaler Gewinn eigen. Er besteht darin, daß die Gefühlsbetonung der neuen Zahlbegriffe sich so gestaltet, daß das Kind sich nicht mehr mit dem Ausdruck „viele" begnügt[1]). Das Wertbewußtsein verfeinert sich vielmehr rasch so weit, daß die Eins auch innerhalb jedes größeren Zahlraums als wesentliche Differenz aufgefaßt wird. Das Kind begreift z. B. die Notwendigkeit, daß einem Häuflein von 10 Zuckerkügelchen noch eins hinzugefügt werden muß, wenn eine Gruppe von 11 Kindern sie unter sich verteilen will. Es ist das nicht dasselbe wie die ähnliche Erscheinung auf der vorigen Stufe. Denn während dort die Eins erlebend gewonnen wird, wird sie hier als notwendig erfaßt und angewendet. Die Genügsamkeit des Bewußtseins „viele" weicht der Gewissenhaftigkeit des Bewußtseins „wie viele?".

Der Gedanke der Erweiterung der Zahlbegriffe über den Aufmerksamkeitsumfang hinaus, ferner der Gedanke des wesentlichen Wertes der Einsdifferenz an jeder Stelle des Zahlenraums, endlich der Gedanke der Zahlwörter als Begriffssymbole führt zum Zählen[2]).

Mag sich dies auf der vorigen Stufe, also innerhalb der Gewinnung der Zahlbegriffe 1 bis 4, noch nicht als nötig erwiesen haben, auf dieser neuen Stufe muß dem Aufmerksamkeitsumfange dadurch nachgeholfen werden, daß eine immer wiederkehrende und dadurch völlig mechanisierte Wortreihe abläuft, die die sonderbare Eigenschaft hat, daß sich mit jedem Gliede ein Größengefühl verbindet, dessen Vorstellungssubstrat, in den Blickpunkt der Aufmerksamkeit gehoben, das Bewußtsein ergibt, daß das betreffende Glied größer sei als alle die vorhergehenden, im besonderen um 1 größer als das unmittelbar vorhergehende.

Um das völlig zu begreifen, muß man sich andere Reihen vorstellen, etwa Gedichtreihen, Auszählreime, Farbenreihen, Tonreihen,

[1]) Ähnlich gewissen südamerikanischen Stämmen, welche sich in die Haare fahren, um anzudeuten, daß es sich um eine Zahlvorstellung handle, die über die Fünfzahl ihrer Finger hinausgeht.

[2]) Wilk ist im Irrtum, wenn er glaubt, „das Zählen ist ein Vorgang, der sich rein im Innern abspielt" (Deutsche Schule 1914, 1., S. 35 ff). Das Zählen im besonderen ist eine genau so komplizierte Erscheinung wie das Sprechen im allgemeinen. Niemand wird aber das Sprechen als inneres Geistesprodukt ansehen wollen, bei dem „die Anschauung nichts nütze".

Notenreihen, Schmuckreihen usw. Auch hier verbindet sich mit jedem Gliede ein eigenartiges Gefühl, sei es dies, daß dem betreffenden Gliede bestimmte andere, die irgend welchen Akzent haben, vorangegangen sind, oder daß solche in nächster Nähe erwartet werden können, sei es dies, daß dem betreffenden Gliede selber innerhalb der Reihe eine hervorragende Bedeutung zukommt. Infolge dieser Gefühle ist man in der Lage, irgendeine Zeitreihe sich räumlich vorzustellen, sie gewissermaßen mit einem Blick zu überschauen und das betreffende Glied an der richtigen Stelle einzuordnen.

Genau so ist es mit der Zahlreihe, nur daß hier das betreffende Gefühl einen ganz ausgesprochenen Charakter von einfachster Beschaffenheit hat und so völlig mit seinem Vorstellungssubstrat verschmilzt, daß nur eindringende psychologische Analyse die Elemente zu sondern vermag. Diesen eigenartigen Gefühlscharakter der Zahlwörter erkennt man auch aus folgender Erwägung. Gesetzt den Fall, es prägte jemand seinem Kinde die Reihe der Zahlwörter in umgekehrter Folge ein, also zehn, neun, acht usw., so würde das Kind das folgende Zahlbild ∷ als sieben bezeichnen, und dies ⠿ mit fünf. Dem Ausdruck sieben würde eben dann dies charakteristisch sein, daß ihm 3 Glieder vorausgegangen sind, und dem Ausdruck fünf, daß ihm tatsächlich 5 *vorausgehen*. Die umgekehrte Zahlreihe würde also mit den gleichen Zahlwörtern andere Begriffe verbinden. Auch auf die kindlichen Auszählreime sei nochmals hingewiesen. Auch das jüngste Kind, das über das Versehen verfügt: A, e, i, o, u, und raus warst du! weiß, daß, wer u bekommt, in einem größeren Kreise niemals der erste oder zweite ist. Auch die Wörter a, e, i, o, u rufen also in dieser Zusammenstellung im Kinde ein Größengefühl hervor.

Die unterbewußte Grundlage, aus welcher dies Größengefühl herauswächst, ist nun gegeben in der Aufeinanderfolge, in dem konkreten Akte des Aufzählens[1], ist also in der Hauptsache eine feste Reihe von Bewegungs- und Gehörsempfindungen, oder besser noch: eine *Zeitvorstellung* von verschiedener Dauer (je nach der Zahlgröße), welche einer *Raumvorstellung* — nämlich derjenigen der beim Zählen gemeinten Objekte — assoziiert ist.

Mit Hilfe dieses Größengefühls des einzelnen Zahlwortes ist nun das Bewußtsein imstande, mehr Elemente in sich aufzunehmen als vier; wenn sie in der erworbenen Zahlenreihe ablaufen, eigentlich fast beliebig viel. Wenn jemand die Reihe bis 436 ablaufen läßt, hat er gewissermaßen die sämtlichen vorausgegangenen 435 Vorderglieder im Bewußtsein, so wie bei der dritten Strophe eines Gedichts die mit ihm sinnvoll verbundenen beiden ersten noch leise im Bewußtsein klingen.

[1] Vergl. Meumann, Abriß S. 379.

Aus alledem geht hervor, daß das Wesentliche an der ganzen Erscheinung **nicht die Wortreihe an sich** ist, selbst nicht in ihrer festen Aufeinanderfolge[1]), sondern das mit der Wortreihe verbundene, stufenartig veränderte **Größengefühl**, das sich nur bilden kann in Assoziation mit einer fortwährend um 1 wachsenden Größenreihe, welche an den Dingen wohl wahrnehmbar, aber doch von ihnen zu abstrahieren ist. Damit ist erklärt, warum jenes „Zählen" kleiner Kinder noch keinen „Sinn" haben kann. Ihre ganze Entwicklung ist noch nicht so weit fortgeschritten, daß sie — wenn auch in bescheidenen Grenzen — zu einer solch komplizierten Assoziation einschließlich der nicht geringen Abstraktion fähig wären[2]).

Diese Abstraktion — wenn sie überhaupt Abstraktion ist, nicht bloß nachgesagtes Wortgeklingel ohne Inhalt — baut sich auf auf den Sachvorstellungen. Darum sind die Zahlbegriffe dieser Stufe **zunächst** noch ganz und gar an die dinglich und ganz individuell ausgestattete Sachvorstellung gebunden. Das Kind versteht 8 Pflaumen, 8 Pfennige, 8 Eier, 8 Bretzeln, aber nicht „acht". Bei diesem Worte geht es ihm wie uns bei zielenden Zeitwörtern, sie verlangen eine „Ergänzung". Mit der Zunahme der Zahlwörter aber, wozu wir freilich nicht nur die ersten 10 rechnen dürfen, ändert sich das leise aber stetig. Ohne auf die rechnerischen Beziehungen einzugehen, die uns noch beschäftigen werden, läßt sich folgendes feststellen. Das Kind, das mitten auf dieser dritten Stufe steht, stellt wohl auch noch 18 Pfannkuchen vor, es ist ein ganz großer Teller voll. Aber daneben ist es schon zu der Bewußtheit gelangt, daß diese 18 mehr seien als 16, auch mehr als 15, aber wiederum weniger als 20. Es kann dabei bei der Vorstellung der Pfannkuchen verharren, aber es hat nicht mehr nötig, sich **vorzustellen**, ob es weniger werden oder mehr bei in der Nähe liegenden

[1]) Das ist die Form, in der sie kleine Kinder oft „können".

[2]) Man darf nicht behaupten, daß auch das kleine Kind schon fähig sei, Reihen zu lernen. Wohl werden ihm Wortreihen und andere eingeprägt. Wer aber genau beobachtet, kann fast immer sehen, daß es diesen Reihen fehlt an der nötigen Zuverlässigkeit. Das persönliche Interesse an dem Kinde wie der Gedanke, daß seine schwachen Kräfte doch „alles Mögliche" leisteten, läßt uns in der Regel über die geradezu erstaunliche Unvollkommenheit solcher Leistungen hinwegsehen. Daß wir nur relativ gemessen haben, verschwindet dann in unserer Erinnerung, und wir trauen dem Kinde nun Leistungen zu, deren es gar nicht fähig ist.

Ein Beispiel, das dem Erwerben der Zahlbegriffe ähnlich ist, nur etwas leichter in den Anforderungen, wäre noch dies: Ein Kind solle die Namen der Klaviertasten c, d, e usw. lernen und dabei die einzelnen Tasten bezeichnen — allerdings auch mit Unterscheidung der verschiedenen Oktaven. Mutet man diese Leistung einem siebenjährigen Kinde zu? Und wer es tun würde, täte es sicher in dem Bewußtsein, den frühesten Zeitpunkt gewählt zu haben. Aber diese Forderung ist wesentlich leichter als das Erwerben der Zahlenreihe, weil sie dieser gegenüber in jeder Hinsicht kürzer ist, und weil keine Abstraktion dabei gefordert wird.

Zahlangaben, es arbeitet schon mit den Zahlwörtern allein. Das will sagen, daß neben der sachlichen Vertretungsvorstellung des Zahlbegriffs, die Zahlvorstellung, sich ganz unbemerkt das Zahlwort als eine bald gleichwertige, später sogar vorwiegende Vertretungsvorstellung einschiebt. Ursprünglich ganz und gar der dinglichen Vorstellung entstammend und auf ihr aufbauend, hat es nach und nach symbolischen Charakter angenommen. Dadurch erlangte es vor der sachlichen Vertretungsvorstellung einen großen Vorzug in der Bequemlichkeit seines Gebrauchs und in der damit verbundenen Ersparnis an geistiger Energie. 20 Kirchen sich vorzustellen, kostet eine große Summe von dieser Energie, aber niemandem fällt es ein, diese Summe aufzuwenden, wenn man so leichthin sagt, jene Stadt habe 20 Kirchen. Es ist darum zu verstehen, wenn das Zahlwort das Bestreben zeigt, allmählich die sachliche Vertretungsvorstellung ganz beiseite zu schieben und sich an ihre Stelle zu setzen.

Dieser Wechsel der Stellvertretungsvorstellung gilt zunächst für die einzelnen Zahlen, bei denen jedes akustisch-motorische Wortbild mehr die Bedeutung des Verkehrsmittels übernommen hat, während das visuelle für die Plastizität der eigenen Vorstellung zur Verfügung bleibt. Bei der ganzen Zahlenreihe waltet öfter das umgekehrte Verhältnis. Sie entsteht als Reihe von Klangbildern, mit welcher sich dann für das Kind, das diese dritte Stufe erklommen hat, die schwache Raumvorstellung einer Zahlenlinie assoziiert[1]), selbstverständlich mit der Maßgabe, daß je nach dem Vorstellungstypus der einzelnen Person die eine Art des Vorstellens mehr oder weniger überwiegt, während die andere fast oder gänzlich unbewußt ist.

Die Erwerbungen dieser Stufe gehen — wie schon angedeutet — in den meisten Fällen noch über 100 hinaus. Eine Gliederung wird zwar von der logisch-didaktischen Stoffbetrachtung behauptet, gefordert und geübt, sie läßt sich aber psychologisch nicht nachweisen. Das Kind, das diese Stufe betreten hat, kann schon eine größere Menge zählend bewältigen, Äpfel, Erbsen, Steine, Münzen usw., und ist nur zu gern bereit, seine Erwerbungen anzubringen, d. h. wirklich gegebene Dinge auszuzählen. Aber wenn es bei 29 angekommen ist, fragt es: Wie geht es weiter? Wenn man ihm antwortet: dreißig, dann sagt es befriedigt: Nun kann ich weiter, und zählt bis 39, worauf sich das Frage- und Antwort-

[1]) Wir sehen davon ab, daß infolge fehlerhafter didaktischer Forderungen und Maßnahmen viele Kinder wohl die Lautreihe erwerben, sie aber nicht mit einer Raumreihe verbinden, daher auch nicht das Maßgefühl bei den einzelnen Zahlwörtern erleben. Solche Kinder sind dann aber trotz Lehrplan und trotz einer gewissen Schlagfertigkeit, die sie sich verbal angeeignet haben, noch nicht auf der Höhe dieser Entwicklungsstufe angelangt, von der hier die Rede ist.

spiel hier und bei 49, 59 usf. wiederholt, bis der ganze Haufe gezählt ist. Der gesamte Vorgang kann sich ein halbes oder ein ganzes dutzendmal abspielen, ehe das Kind über diese Hindernisse aus eigner Kraft hinwegsetzt, d. h. sich auch die Zahlwörter dreißig, vierzig, fünfzig usw. angeeignet hat. Demzufolge könnte man diese Stufe gliedern in eine erste Zeit, da die Zahlbegriffe bis 10 oder 12, und in eine zweite Zeit, da die Zahlbegriffe der reinen Zehner gewonnen werden. Jeder sieht aber sofort, daß diese Gliederung ebensowenig innere Berechtigung hat, als die Einschnitte nach 10 oder nach 20. Nicht die Zehnerbegriffe sind es eigentlich, die das Kind in jenem angenommenen zweiten Abschnitte erwirbt, sondern ganz gleichgültige, auch unter einander ganz gleich gültige (d. h. gleich wertvolle) Zahlwörter. Denn die 30, die es lernt nach der 29, hat für das kindliche Bewußtsein dieser Stufe gar keinen Akzent. Es weiß nur, daß nach der 29 ein Wort kommt, das ihm noch nicht geläufig ist. Vielfach muß man auch noch „einunddreißig" hinzufügen, um die Reihe weiterlaufen zu lassen. Auch hundert hat für diese Stufe keinen anderen Wert als den eines schon oft gehörten Zahlwortes, an dem es nunmehr lernt, daß sehr viel dazu gehören, daß es lange dauert, bis man zählend dahin gelangt. Die Cäsur, die hier gemacht wird, ist nicht etwa in dieser Entwicklungsstufe begründet, sondern ist ein Ergebnis unserer mathematischen und didaktischen Gewöhnung. Bald merken einige und nach und nach auch die anderen Kinder, daß man auch darüber hinaus zählen kann, und sie lernen es auch, ohne daß damit ihre Zahlbegriffe auf eine höhere Stufe der Auffassung gelangten, als auf der sie sich schon befinden, die Auffassung der Zahlenlinie.

Blicken wir zurück auf die bisherigen drei Stufen der Entwicklung der Zahlbegriffe! Zuerst erscheint die Stufe des rohen Vergleichs, der sich mit den nötigsten unbestimmten Zahlbezeichnungen begnügt. Eine Summe von 26 ist dem Kinde dieser Stufe ein unerschöpflicher Reichtum, bei dem weder Verminderung noch Vermehrung bemerkt wird, auch gar nicht in Betracht kommt.

Darauf folgt die Stufe des genaueren Vergleichs mit der Gewinnung der Zahlbegriffe 1—4. Das Wesen dieser Stufe besteht einerseits in der Erwerbung der Einsdifferenz, andrerseits in der Zusammenfassung von 2, 3 oder 4 — d. h. den im Bereiche des Aufmerksamkeitsumfangs liegenden — Einzelerscheinungen zu einer Gesamtheit. Auch für diese Stufe ist 26 noch „viel" und nicht zu unterscheiden von 25 oder 30. Aber die wirkliche Wahrnehmung der Vermehrung oder Verminderung — und sei es auch nur um 1 — wird lustvoll oder unlustvoll bemerkt, weil nun auch schon die Eins Eigenwert erlangt hat.

Die dritte Stufe gewinnt die übrigen Zahlbegriffe, soweit dies

ohne Erfassung des Dezimalsystems möglich ist. Ihr sind 26 nicht mehr viele schlechthin, sondern nur noch eine größere — oder gar schon kleinere Zahl, je nach dem Fortschritt des Kindes — die sich aber mit mehr oder weniger Bemühung genau angeben läßt. Sie erwirbt als wichtigstes Hilfsmittel für alle weiteren Fortschritte das Zählen.

§ 11. Die Erwerbung des Zahlensystems.

Ein wesentlicher Fortschritt, eine neue Stufe in der Entwicklung des Zahlbegriffes ist damit gegeben, daß das Kind das Verständnis gewinnt für den dezimalen Aufbau des ganzen Zahlensystems. Das ist etwas vollkommen anderes. Denn auf der vorigen Stufe hatte es völlig genug damit zu tun, die Zahlen als Zahlenreihe zu bewältigen. Und diese Zahlenreihe hatte für seine Auffassung noch ein Ende[1]). Auf der neuen Stufe aber wird die Summe der Zahlbegriffe ganz außerordentlich erhöht. Das Erfassen der Größe ist nicht mehr abhängig von der subjektiven Reichweite des eigenen Zählens oder von der zur Verfügung stehenden Zeit, der Umfang des Zahlraumes dehnt sich vielmehr in die Unendlichkeit, jede beliebige Größe kann nunmehr gewissermaßen mit einem Schlage erfaßt werden, und — was besonders bedeutsam ist — es wächst von Tag zu Tag die Erkenntnis, daß jede beliebige Größe der Feststellung sich fügen müsse und der Festhaltung fähig sei.

Und diese Erweiterung des Herrschaftsbereiches gelingt infolge einer anderen höheren Auffassung der Zahl. Während dem Kinde vorher die Zahlen als lange, und später als endlose Reihe erscheinen, eine neben der anderen und jede ohne Beziehung zur anderen, wie die Rollkiesel im Flußbett — eine Reihe, die nur dadurch erleichtert wird, daß zehn gewisse Wortklänge immer wiederkehren, wie auf dem Klavier immer wieder die gleichen Tonnamen, so bekommt jetzt der Zahlbegriff eine andere Struktur. Er tritt in Beziehung, nicht nur zu den Nachbarn, zum vorhergehenden und zum nachfolgenden, sondern zu der Mehrzahl der übrigen seines Geschlechts. Es ist

[1]) Jedem Lehrer ist die Erfahrung bekannt, daß ein Kind behauptet, es könne bis 40 zählen, ein anderes bis 100, ja sogar bis 150 ist uns vorgekommen. Und jeder Lehrer hat gewiß — ohne erst länger die psychische Konstitution dieses Standpunktes zu untersuchen — in der Absicht, das Kind zu fördern, hinzugefügt: Vielleicht kannst du noch eins weiter zählen? In fast allen Fällen genügt diese Aufforderung, um die Zahlenreihe von dem betreffenden Kinde fortsetzen zu lassen. Manchmal sagt auch ein Kind: Ich weiß die nächste nicht, ein Beweis dafür, daß das Gefühl für das Weitergehen der Zahlenreihe da ist. Andere Kinder behaupten beglückt: O, nun kann ich bis 200 zählen, und wenn man sie wiederum auffordert, noch eins hinzuzufügen, dann bekommen sie ein Gefühl der Weite, das mit dem Schwindelgefühl Ähnlichkeit hat, das aber noch unsicher ist, und das leicht seinen Ausdruck darin findet: Nun weiß ich nicht, wie weit ich zählen kann.

nicht mehr ein Punkt in einer unendlichen Reihe — ein Punkt neben anderen Punkten, sondern ein Baustein in einem gewaltigen Bau, ein notwendiges Glied eines gewaltigen Systems von über- und untergeordneten Einheiten verschiedener Grade, deren Zahl ständig wächst. Und mit Hilfe dieses Systems läßt sich der große wie der kleine Zahlbegriff mit einer Kürze, Schnelligkeit und Sicherheit zum Ausdruck bringen, die unser höchstes Erstaunen erregen würde, wenn wir es nicht gewöhnt wären und als selbstverständlich ansähen. Würden wir nicht als Kind, sondern erst in reiferen Jahren vor die Erscheinung gestellt, daß es möglich ist, eine bestimmte größere Anzahl, die man in etwa fünf Stunden zählen könnte bei einiger Eile, daß man diese Anzahl in fast ebensoviel Sekunden festlegen kann als 17 Tausend, 9 Hundert, 8zig und 2 — dann würden wir jenes ehrfürchtige Staunen erleben und diese Geistesleistung ganz anders bewerten als jetzt, da wir uns kaum der Tatsache ihres Vorhandenseins bewußt sind.

Langsam und unmerklich, wie wir sie einst erklommen haben, betritt auch heute das Kind diese Stufe. Wer da glaubt oder ahnt, daß ihre Erreichung etwas Einfaches und Natürliches sei, etwas, was in unsern psychischen Anlagen seine Begründung finde, der hat in hohem Maße recht; denn das Mittel zu dieser Erweiterung, Mechanisierung und Höherführung des Zahlbegriffs ist der **Rhythmus**. „Unser Bewußtsein ist rhythmisch angelegt", das ist der erste Satz, mit dem Wundt die Ergebnisse der psychologischen Forschung einem größeren Leserkreise darzulegen versucht[1]. Und nichts anderes als durchgeführte und fortschreitende Rhythmisierung ist es, wenn die Einheit der Zehnergruppe in immer neuen Intensitätsstufen auf Hunderter, Tausender usw. übertragen wird, als auf höhere Einheiten, die gleichwohl denselben Gesetzen gehorchen wie die Reihe der elementaren Zahlbegriffe 1 bis 10, außerdem aber noch zahllose übersichtliche und konstruierbare Beziehungen aufweisen.

Zur Rhythmisierung[2]) gelangt das Kind freilich nicht erst, wenn es im Begriffe ist, die vierte Entwicklungsstufe zu betreten, sie setzt

[1]) Wundt, Einführung in die Psychologie. Leipzig 1911.

[2]) Gewöhnlich bezieht man die Ausdrücke Rhythmus, Rhythmisierung auf zeitliche, die Ausdrücke Gruppe, Gruppierung auf räumliche Anordnung. Wegen der völligen mathematischen Gleichheit der hier in Betracht kommenden zeitlichen oder räumlichen Erscheinungen sei es gestattet, diese Ausdrücke in etwas veränderter Bedeutung zu gebrauchen. Der Ausdruck Rhythmisierung soll gelten für die gebundene, in gleicher Form wiederkehrende Anordnung. Gruppierung würde dann die mehr freie, höheren ästhetischen und anderen Gesetzlichkeiten unterliegende Anordnung sein (die Gruppierung einer Ausfluggesellschaft zum Zwecke photographischer Aufnahme, Gruppierung einer Schulklasse nach Interessengemeinschaften usw.). Es dürfte nicht unbekannt sein, daß die Ausdrücke in dieser Bedeutung schon vielfach üblich sind; man spricht nicht bloß von musikalischem Rhythmus, sondern auch von dem des Ornaments, mathematisch also von zeitlicher und räumlicher Rhythmisierung.

schon früher ein, im Gebiete der Zahl erscheint sie schon während der dritten Stufe. Hier hat sie zunächst eine ganz ähnliche Wirkung wie die Reihenassoziation, nämlich die, den Bewußtseinsumfang beträchtlich zu erweitern. Schon an sehr qualitätsarmen Schalleindrücken, wie sie durch die Schläge eines Metronoms dargestellt werden, läßt sich diese Erfahrung gewinnen. Können wir ohne Rhythmisierung (und selbstverständlich ohne Zählen) mit Sicherheit nur 6 Elemente auffassen, so steigt bei einfachster Rhythmisierung (im $^2/_8$ Takt, wo also nur Hebung und Senkung wechselt) ihre Zahl sofort auf 16, bei differenziertester Rhythmisierung (z. B. in den Achteln des $^4/_4$ Taktes, die drei verschiedene Hebungen aufweisen) gar auf 40. Selbst ohne Apparate läßt sich das einigermaßen zeigen, wenn man eine Vertrauensperson veranlaßt, mit einem Bleistift möglichst gleichmäßige rasche Schläge auf der Tischplatte auszuführen. Anfangs ist es dabei nicht ganz leicht, die Bedingung zu erfüllen, daß man als Versuchsperson nicht zählen darf. Wenn man dann einen solchen Takt in die Schläge hineinhört, gelingt es, ihrer 36 z. B. von vor einer halben Minute gehörten 38 zu unterscheiden. Und zu ähnlichen Ergebnissen ist die Forschung betreffs der räumlichen Rhythmisierung gekommen.

Wenngleich nun unser Bewußtsein eine starke rhythmische Anlage zeigt[1], die Entwicklung des rhythmischen Gefühls scheint dieser Anlage nicht zu entsprechen, scheint ein anderes Tempo einzuhalten, in anderer Kurve zu verlaufen als die Entwicklung anderer geistiger Fähigkeiten. Während die Wahrnehmung, die Stärke der Aufmerksamkeit, die Abstraktion u. a. eine steile Kurve der Entwicklung zeigen[2], so steigt die der Entwicklung des rhythmischen Gefühls viel langsamer, obgleich sie doch von vornherein höher einzusetzen scheint.

Zwar sind schon dreijährige Kinder fähig, eine einfache Reihung vorzunehmen, wie man an den Ausschneide- und Legearbeiten der Kindergärten, an den Bauspielen vorschulpflichtiger Kinder beobachten kann. Eine Rhythmisierung aber, eine Gliederung in gleiche

[1] Die rhythmische Anlage und das entwickelte rhythmische Gefühl haben eine außerordentliche Bedeutung für fast alle Tätigkeiten des Lebens, eine viel größere, als man ihnen im allgemeinen beizulegen geneigt ist. Von den Tänzen der Naturvölker bis zu der Tätigkeit unserer Industriearbeiter, ja bis in die Sphäre der geistigen Arbeit hinein verfolgt die psychologische Wissenschaft (als Völkerpsychologie, Wirtschaftspsychologie und Jugendkunde) ihren Einfluß. Ihm ist Art und Maß, Form und Wirkung alles menschlichen Handelns und Erlebens in ungeahnter Weise unterworfen — insbesondere auch das des Kindes. Nicht Text und Melodie ist es, was dem Kinde (und dem Volke) in der Hauptsache am Lied gefällt — es singt ohne Beschwerde sinnlose Texte — sondern der Rhythmus. Freilich ist diese Bedeutung weder von der forschenden noch von der anwendenden Pädagogik bisher in rechtem Maße gewürdigt worden.

[2] Bekannt ist Jean Pauls Wort: Ein Kind lernt in den ersten drei Lebensjahren mehr als in drei akademischen.

Gruppen, tritt erst wesentlich später ein. Auch wenn man Kinder des ersten Schuljahres veranlaßt, im Schritte zu gehen, im Takte zu marschieren, gemeinschaftlich ein Lied zu singen, macht man die Erfahrung, daß dies nur mit Aufbietung besonderer Aufmerksamkeit und nur kurze Zeit möglich ist[1]). Zwar wird mancher einwenden wollen, daß doch die Spiellieder der kleinen Mädchen, wobei sie sich in gleichmäßigen Schritten im Kreise bewegen und dazu singen und sprechen, durchaus vom Rhythmus getragen seien. Aber dieser Einwand ist nicht ganz stichhaltig. Zunächst wird in fast allen Fällen ein älteres Kind als Anführerin und Lehrerin der kleineren zu entdecken sein. Außerdem ist zu bedenken, daß hier eine ganze Anzahl Reihen zusammentreten — die Reihe der Beinbewegungen, der Sprechbewegungen, die Lautreihen der Töne, der Worte, die visuellen Bewegungsbilder — die sich gegenseitig disziplinieren. Weiter kommt hinzu, daß das Ende der Verszeile immer wieder den Einschnitt bildet, der die rhythmisierte Gruppe in ihren Elementen zusammenfaßt und von der folgenden abhebt, so daß ein verlorener Rhythmus sich hier wieder finden kann. Endlich kommt in Betracht, daß die Spielform gar nicht oder selten über die niedrigsten Formen des Rhythmus hinauskommt, über die Einerrhythmen, die eigentlich als bloße Reihung nur Vorstufe der Rhythmisierung sind, und die Zweierrhythmen[2]).

Die **Bedeutung des Rhythmus** für das Rechnen einerseits, die Eigenartigkeit seiner Entwicklung andrerseits veranlassen uns, mit einigen Worten noch auf weitere Beispiele hinzuweisen.

Wenn ein Kind von 8—10 Jahren Klavier zu spielen anfängt, dann „lernt" es ja auch, daß nach acht Takten das Thema meist wiederholt wird. Aber es fühlt weder für die Achtzahl der Takte eine innere Nötigung, noch hat es ein Interesse daran, daß das Stück „wieder von vorn losgeht", ja in vielen Fällen ist ihm diese Tatsache „langweilig". Das Gefühl für strenge Gliederung, für Rhythmisierung ist eben noch nicht entwickelt. Der Erwachsene aber, der jenem Kinde zuhört, ist leicht geneigt, ihm „jede musikalische Befähi-

[1]) Auch die Erfahrung dürfte nicht einzeln dastehen, daß Kinder, die sich selbst überlassen das Lied vom guten Kameraden singen, nach der zweiten Verszeile nicht $^2/_4$, sondern nur $^1/_4$ pausieren.

[2]) Unsere Beobachtungen der kindlichen Spiellieder ließen uns wohl die Tendenz nach Rhythmus erkennen, die durch alles hindurchzieht, aber gleichzeitig die Schwierigkeit der Ausbildung, die bei den verschiedenen Kindern verschiedene Grade zeigt. Dabei können wir uns je länger, je weniger des Eindrucks erwehren, daß solche arhythmische Naturen gleichzeitig unmathematische Naturen sind. Diese Anregung sei der Beobachtung und dem Studium der Berufsgenossen übergeben. Psychologische Untersuchungen über den Zusammenhang dieser Erscheinungen wären sehr erwünscht. Für die Didaktik des mathematischen Unterrichts können sie jedenfalls recht ersprießlich sein. Scherzweise sei auf die Perspektive hingewiesen, die mathematische Bildung durch Marschierübungen zu fördern.

gung" abzusprechen. Er kann es auch gar nicht begreifen, wie man „ohne Takt" spielen kann.

Und der Turnunterricht zeigt, daß selbst bei älteren Schülern das rhythmische Gefühl der Verfeinerung noch sehr fähig und bedürftig ist.

Es ist in der Tat ein weiter Weg von dem ganz schwachen Rhythmusgefühl des Kindes bis zu dem hochentwickelten einer Militärkapelle, das in aufeinanderfolgenden Takten, welche gleich genommen werden sollen, sich noch nicht einmal Abweichungen von 1 Hundertstel Sekunde gestattet. Und erst auf einer gewissen Stufe der körperlichen und geistigen Entwicklung wird das Kind für einen eigentlichen Rhythmus fähig. Diese Stufe ist aber mit dem vollendeten 7. Lebensjahre im allgemeinen noch nicht erreicht. Damit ist uns ein bedeutungsvoller Fingerzeig gegeben hinsichtlich des Unterschiedes zwischen **natürlicher** und **künstlich getriebener** Entwicklung.

Auch diese letztere hat die besten Absichten — das sei gern zugegeben — und sie ist in ihren Ursachen verständlich. Denn wenn wir Erwachsenen im allgemeinen geneigt sind, unsere Entwicklungsstufe und unsere Fähigkeiten mutatis mutandis den Kindern zuzuschreiben, so sind wir ganz besonders im Gebiete des Rhythmus intolerant, und dazu im Gebiete des Teiles der mathematischen Bildung, welcher auf dem entwickelteren Rhythmusgefühl aufbaut. Wer von uns zurückdenkt an seine Jugend, glaubt, er habe mit der Erwerbung der Zahlenreihe auch das dezimale System gewonnen. Wir verstehen es nicht und suchen nach einem Mangel der Erziehung und des genossenen Unterrichts, wenn wir sehen, wie ein Kind auf einer gewissen Stufe zählen kann, verständig zählen, ohne sich gleichzeitig der dezimalen Gliederung bewußt zu werden. Und doch ist dies die ganz natürliche Entwicklung. Wir schließen freilich: weil die Zahlwortreihe sich wiederholt, müsse eine Rhythmisierung ganz von selbst eintreten. Das ist aber nach all dem Gesagten nicht nötig, gerade auf dem Gebiete der Zahl ist es unmöglich, daß dem Kinde die Rhythmisierung in den Schoß fällt. Wohl **bemerkt** das Kind die Wiederkehr der Reihe, aber sie ist ihm erstens nicht gefühlsbetont, und sodann sind ihm die Rhythmen zu lang.

Ein Zusammenfallen der hier dargelegten dritten und vierten Stufe, wie es vielfach angenommen wird, und auf das vor allem unsere Unterrichtspläne fast sämtlich noch eingestellt sind, entspricht also nicht den psychologischen Tatsachen. Vielmehr kann die vierte Stufe erst dann betreten werden, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: daß die dritte erreicht ist, und daß die Kräfte zum Bewältigen der vierten vorhanden sind. Das will sagen, daß die Erwerbung des Systems erst dann einsetzen kann, wenn die Erwerbung der Zahlen-

reihe — die gleichbedeutend ist mit Einerrhythmisierung — vorausgegangen ist. Daß ferner eine gewisse Entwicklungshöhe des rhythmischen Gefühls erreicht ist, die die Praxis durch Erleben von Zweier-, Dreier- und anderer Rhythmen und durch Übung in ihrer Anwendung zu gewinnen sucht.

In der bisherigen Schilderung der Entwicklung der Zahlbegriffe sind wir auf eine Erscheinung noch nicht eingegangen, die mancher schon vermißt haben wird, auf die Darstellung der Zahlbegriffe im Schriftbild, auf die Ziffern. Gehörte die Gewinnung der Zahlwörter und ihr bedeutungsvolles Hervortreten an die Stelle der Sachvorstellung in der Hauptsache der dritten Stufe an — die vierte vermittelt eine vertiefte Auffassung der Zahlwörter und ihrer Bestandteile bei veränderter Bewußtseinseinstellung —, so bewegt sich die Entwicklung von dort aus in derselben Richtung weiter, wenn sie neben das Zahlwort, das hörbar und zeitlich ist und Erscheinungscharakter hat, die Ziffer stellt, die sichtbar und räumlich ist und dinglichen Charakter trägt. Sie ist — psychologisch betrachtet — nichts für den Zahlbegriff irgend Wesentliches. Sie ist symbolisch in noch höherem Maße als das Zahlwort; sie ist dem Zahlwort ungeheuer überlegen durch ihre Dauer, und sie zeigt endlich in der Abfolge der Begriffsentwicklung genau das gleiche Bestreben wie das Zahlwort, nämlich sich zur alleinigen Stellvertretungsvorstellung des Zahlbegriffs emporzuschwingen[1]). Es ist nützlich, den Zusammenhang zu überblicken: Die eigenartige Begriffswelt des Maßes, die einerseits den Eigenschaftsbegriffen, andrerseits den Beziehungsbegriffen nahe steht, wird zuerst vertreten durch individuelle Sachvorstellungen, dann gleichzeitig und immer mehr hervortretend durch lautliche Symbole, die Zahlwörter, die schon so gut wie nichts mit dem eigentlichen Zahlbegriff zu tun haben und ihm nur komplikativ zugeordnet sind; endlich durch Symbole für diese Symbole, die Ziffern, deren erhöhte Abstraktion sich schon darin zeigt, daß sie international verständlich sind, also für Zahlwörter aller möglichen Sprachen die gleichen Schriftzeichen darbieten.

Die Gewinnung der Ziffer ist gegenwärtig wohl in der übergroßen Mehrzahl der Fälle ein Ergebnis des Schulunterrichts. Je nachdem dieser nun gestaltet ist, erscheint die Ziffer als Stell-

[1]) Bei Leuten, die viel zu rechnen haben, besonders mechanisch zu rechnen, wie addieren — etwa bei Kassenbeamten — kann die Ziffer diese Bedeutungsstufe erreichen. Wenn solche 4 und 3 untereinander erblicken, so brauchen sie weder an das Zahlwort vier, noch an drei, noch an sieben zu denken, sondern schreiben mechanisch die Ziffer 7 hin. Bei den meisten Menschen freilich bleibt sie Stellvertretungsvorstellung neben dem Zahlwort.

vertretungsvorstellung der Zahlbegriffe früher oder später. Und es dauert immerhin eine gewisse Zeit, ehe die Assoziation zwischen Sache, Begriffsinhalt, Wort und Ziffer so fest geworden ist, daß eins dieser Elemente die übrigen ohne weiteres reproduziert.

Mit dem Erreichen dieses Ziels ist aber die Entwicklung dieses Zweiges noch nicht abgeschlossen. Denn die Gewinnung der Ziffer ist gewissermaßen der erste größere Schritt auf dem Wege zu beharrender Darstellung der erworbenen Zahlbegriffe. Der zweite, ebenso hochbedeutsame, wenn nicht in unserer Zeit noch wichtigere, ist die Gewinnung der Erkenntnis des Stellenwertes der Ziffern, die Erwerbung des Positionssystems, in welchem jede Ziffer außer ihrem unveränderlichen Werte noch einen veränderlichen hat, der von ihrer jeweiligen Stellung abhängig ist.

Diese Erkenntnis ist durchaus nicht mit der Ziffer zugleich gegeben, auch nicht mit der zweistelligen oder dreistelligen. Kinder assoziieren zunächst das Zahlwort auch mit einer zweistelligen Ziffer ebenso mechanisch (d. h. ohne daß die Aufmerksamkeit sich der inneren Beziehungen zwischen beiden bewußt wird), wie sie irgendeine Verszeile mechanisch — und infolgedessen nicht selten verständnislos — auswendig lernen. Es waltet hier vielmehr dasselbe Verhältnis ob, wie bei der Gewinnung der Zahlwörter und des Dezimalsystems. Wie dort beides durchaus nicht dasselbe ist, ja wie der Erwerb dieser Erkenntnisse verschiedenen Stufen in der Entwicklung des Zahlbegriffs angehört, so auch hier: Die Gewinnung der Ziffer als eines Symbols für das Zahlwort entspricht einer niedereren Stufe der Entwicklung, die Erkenntnis des Positionswertes der Ziffer einer höheren[1]).

Wer diese Erscheinungen in ihrer Gesamtheit zu überblicken sucht, dem wird sich von selbst der Gedanke aufdrängen, daß hier jedenfalls ein gleichzeitiger Parallelismus vorliege. Eine rasch zugreifende Betrachtung findet dann, daß neben der Erwerbung der Zahlwörter die der Ziffern, und neben der Erwerbung des Dezimalsystems die des Positionssystems einhergehen müsse. Das ist aber ein nicht geringer Irrtum, der leider auch in die Didaktik des mathematischen Unterrichts hereingeraten ist und hier recht unliebsame Folgen gezeitigt hat[2]).

Um dies zu erkennen, muß man sich zunächst vergegenwärtigen den ganz allgemeinen Gedanken aller Entwicklung, daß ein Ersatz für irgendeine Erscheinung einer wesentlich späteren Zeit angehört als die Erscheinung selbst[3]). Nun kann man mit nicht ge-

[1]) Man kann wohl sagen, daß diese beiden Stufen durchgängig 1—2 Jahre auseinander liegen.

[2]) Näheres darüber unter der Überschrift „Gebrauch der Ziffer".

[3]) Das zeigen alle Ersatzmittel des wirtschaftlichen Lebens (Kaffee, Sago, Gold- und Papiergeld, „echte" und „unechte" Möbel . . .), die Ersatzmittel der

ringer Berechtigung die Ziffer als das Ersatzmittel des gesprochenen Zahlworts sehen, und das Positionssystem als ein geniales, aber gar nicht unbedingt notwendiges Ersatzmittel — nämlich als räumliches Darstellungsmittel des in den Zahlwörtern unräumlich vorhandenen Dezimalsystems. So hatten Griechen und Römer wohl das Dezimalsystem, nicht aber das Positionssystem[1]).

Die Annahme eines gleichzeitigen Parallelismus ist derselbe Irrtum, als wenn man behaupten wollte, man müsse sprechen und schreiben gleichzeitig lernen (nicht lesen und schreiben, das wären nicht die hier entsprechenden Tätigkeiten). Die Sachlage ist doch so: Die Gesamtheit der Sachvorstellungen und Erscheinungen bewältigen wir, indem wir Begriffe bilden, die eine Sprachbezeichnung bekommen, gewissermaßen ein Etikett, mittels dessen wir eine ganze Reihe von Sachvorstellungen zusammenfassen. Die Sprachbezeichnungen aber machen wir dauerhaft, wir geben ihnen räumliche Gestalt, indem wir die Schrift hinzufügen. Ganz gewiß ist der Ausspruch voll berechtigt, daß mit der Schrift erst eigentlich die Kultur begonnen habe; aber vor aller Schrift hat es Jahrtausende hindurch die Sprache gegeben als Mittel der Begriffsbezeichnung. Und wie aus langen Zeiträumen heraus erst langsam in der Menschheitsgeschichte das Bedürfnis nach räumlicher Festlegung des flüchtigen Wortes erwuchs, so gibt es auch im Jugendalter des einzelnen Menschen eine Zeit, da er sich — sogar rechnend — mit Zahlwörtern begnügt und gar nicht das Bedürfnis hat, seine Berechnungen schriftlich festzulegen.

Die Annahme eines solchen gleichzeitigen Parallelismus ist ja psychologisch begreiflich. Einmal kommt sie der ganzen Entwicklungsrichtung unseres Bewußtseins entgegen, die in der Zusammenfassung, in der Abstraktion, im System ihre Zielpunkte sieht. Und zum anderen sehen wir aus unserer Altersperspektive heraus die kindliche Entwicklung viel zu sehr verkürzt und nehmen als gleichzeitige Vorgänge an, was in Wahrheit weit auseinander liegt.

Wenn somit die Annahme eines gleichzeitigen Parallelismus der Erwerbung von Zahlwort und Ziffern, von Zahlsystem und Positionswert abgelehnt werden muß, so darf doch nicht jeder Parallelismus abgewiesen werden. Wie ein solcher zwischen Sprechen- und Schreibenlernen besteht, so auch zwischen dem Erwerb von Zahlwort und Ziffer. Nur ist es, wie man aus diesem Ver-

Sprache (Hauptwort — Fürwort), der Erfahrung (eigene Erfahrung — Erzählung, Bild, Kino), der Sitte (Händefalten, Hutabnehmen), des Rechts (gleichsinnige Sachbeschädigung — Freiheitsentziehung) usw.

[1]) Und indem unsere Vorfahren, unsere einfacheren Zeitgenossen auf dem Lande, an der See und im Gebirge, auch unsere Kinder, Striche an Stelle der Ziffern verwenden — man vergleiche übrigens auch die Aufzeichnungen beim Billardspiel — verzichten sie auf das Positionssystem und seine Vorteile.

gleich ohne weiteres entnehmen kann, nicht ein gleichzeitiger, sondern ein ungleichzeitiger. Es ist nicht — um das geometrische Bild des Parallelismus durchzuführen — der des rechtwinkligen, sondern der des schiefwinkligen Parallelogramms. Jener

Entwicklung der Ziffer und des Positionssystems

Entwicklung der Zahlwörter und des Dezimalsystems

würde andeuten, daß die einander entsprechenden Erscheinungen zu gleicher Zeit (senkrecht übereinander), dieser, daß sie nacheinander auftreten.

Die Tatsache, daß während dieser ganzen Entwicklung sich langsam ein Wechsel der Stellvertretungsvorstellungen vollzieht, kann nun auch noch von einer anderen Seite beleuchtet werden. Es muß zu dem Zwecke zurückverwiesen werden auf unsere Ausführungen über die Bedeutung der Sachbegriffe und ihrer Stellvertretungsvorstellungen (S. 57). Was dort von den Sachbegriffen gesagt wurde, gilt in vollem Umfange auch für die Zahlbegriffe, nämlich:

daß im Gebiet der Erkenntnis die Gesamtvorstellung grundlegende Bedeutung, der reine Begriff aber die Bedeutung der höchsten Entwicklungsform hat;

daß aber im Gebiet des Ausdrucks dem Begriffe (ganz abgesehen von dem Grade seiner Veredlung) die grundlegende, der individuell ausgestatteten Gesamtvorstellung aber die Bedeutung der Zielform zukommt.

Das will sagen, daß die Entwicklung des mathematischen Wissens, insbesondere die Entwicklung der Zahlbegriffe, ausgeht von dem ganz individuell ausgestatteten Erlebnis der Gleichartigkeit benachbarter Bewußtseinsinhalte, so daß sie immer mehr von dem Individuellen abstrahiert und im reinen Begriff ihre Krönung findet, der in einem möglichst kurzen, ihm allein zugehörigen Symbol seine Stellvertretungsvorstellung hat. Daß aber die Entwicklung des mathematischen Könnens, speziell die Anwendung der erworbenen Zahlbegriffe auf die tausenderlei Fälle des Lebens, den umgekehrten Weg geht, nämlich für den einzelnen Begriff im Augenblick diejenige Stellvertretungsvorstellung zu finden, deren Plastizität den jeweiligen Anforderungen der Lage entspricht. Dabei muß selbstverständlich das Begriffsgefühl sehr lebhaft sein. Mit seiner Hilfe haben wir das Bewußtsein, eine typische Stellvertretungsvorstellung oder eine

solche erfaßt zu haben, die nach rechts oder links hinneigt, oder endlich eine, welche nach der einen oder anderen Seite hin als Grenzfall anzusprechen sein würde.

Außer diesem Gedanken der **rechnerischen Anwendung** führt auch der andere, das **Behalten der Zahlen** zu entwickeln, zu ähnlichen Ergebnissen. Das akustische wie das visuelle Begriffssymbol erhalten nämlich eine wesentliche Stütze, wenn sich ihnen das Größengefühl zugesellt, dessen Bewußtwerden die dritte Stufe der Entwicklung der Zahlbegriffe kennzeichnet. Das geschieht aber mit besonderem Erfolge durch die Vorstellung der Raumreihe oder irgendeine andere Vorstellung von räumlicher Größe.

Die Höhe der Entwicklung wird darum nicht gekennzeichnet durch das Vorhandensein nur noch einer einzigen Vertretungsvorstellung für den Zahlbegriff — etwa des Zahlwortes — sondern durch eine Mehrheit sachlicher und symbolischer Vertretungsvorstellungen. Wer es darum zu höchster Entwicklung seiner mathematischen Fähigkeiten bringen will, der muß — abgesehen von später zu erörternden Bedingungen — einerseits nach immer größerer Reinheit des Begriffs, nach immer abstrakterer Gestaltung, nach immer präziserer Form seines Symbols streben, andrerseits aber ebenso sehr sich bemühen, für jeden Begriff fast automatisch nicht nur symbolische, sondern auch individuell ausgestaltete sachliche Stellvertretungsvorstellungen bereitzuhalten.

Das Absterben der sachlichen Zahlvorstellung zugunsten der lediglich symbolischen Bezeichnung des Zahlbegriffs führt zu einer begrifflichen Verknöcherung, der der Irrtum eng benachbart ist. Allein das ununterbrochene Hinauf- und Hinabgleiten zwischen Individualvorstellung und Begriff sichert auch dem letzten Sproß dieser Entwicklung die Verbindung mit dem Leben, führt auch dem höchsten Zweige dieses Baumes die nährenden Wurzelsäfte zu, läßt auch den letzten Ergebnissen des denkenden Geistes aus dem Boden der Wirklichkeit sieghafte Kräfte zufließen. Das schöne Gleichnis von Antäus ist unzweifelhaft auch auf psychologisch-mathematischem Boden erwachsen.

Es erübrigt noch, mit wenigen kurzen Strichen die weitere Entwicklung der Zahlbegriffe zu skizzieren. An die vierte Stufe, die Gewinnung des Zahlsystems, schließt sich als fünfte an die Gewinnung der **Bruchzahlen** und **Dezimalzahlen**. Diese letzteren setzen den Erwerb des Positionssystems voraus. Da sie aber zugleich als Bruchzahlen Bedeutung haben, so empfiehlt sich die angegebene Einreihung[1]).

[1]) Hierbei ist nur die psychologische Entwicklung der Zahlbegriffe ins Auge gefaßt, nicht die didaktische Unterstützung dieser Entwicklung, die vielfach Vor-

Als weitere Stufen für die Entwicklung des Zahlbegriffs kommen in Betracht die Gewinnung der **negativen Zahl**, der **irrationalen Zahl** und der **imaginären** und **komplexen Zahl**. Für das Gebiet des Volksschulrechnens kommen sie ja nicht eigentlich in Betracht. Die wenigen Fälle, in denen negative oder irrationale Zahlen herangezogen werden — von letzteren z. B. π, $\sqrt{2}$ usw. — sind nicht ausreichend, um den Zahlbegriff selbst auf eine höhere Stufe zu heben. Dagegen sind diese Stufen unerläßlich dort, wo die mathematische Bildung bis zu einer gewissen Höhe der Entwicklung geführt werden soll[1]).

Eine graphische Darstellung der Entwicklung des Zahlbegriffs könnte folgende Form haben, die vor allem zeigen soll, wie die Stellvertretungsvorstellungen nebeneinander herlaufen:

Ziffer Positionsziffer usw.
-|-
Ziffer u. sonstige Zahlzeichen als Vertretungsvorstellung

Zahlwort als Stellvertretungsvorstellung

sachliche Stellvertretungsvorstellung

unbestimmte Zahlbegriffe	die ersten bestimmten Zahlbegriffe	Zahlreihe	Zahlsystem	Bruch- und Dezimalzahlen	negative	irrationale	imaginäre Zahlen

§ 12. Die Zahlbeziehungen.

Bisher ist nur die Rede gewesen von Zahlvorstellungen und Zahlbegriffen. Diese bilden für unser Rechnen das notwendige und selbstverständliche Material. Und das Rechnen ließe sich als die Hantierung mit den Zahlbegriffen ansehen, so wie alles andere Denken in dem Hantieren mit Sach- und allen sonstigen Begriffen besteht. Aber wie mit dem Holz noch nicht das Hobeln und mit dem Eisen noch nicht das Schmieden, wie mit dem Wort noch nicht das Denken, so ist mit den Zahlbegriffen noch nicht das Rechnen gegeben[2]). Es ist noch etwas anderes, Höheres. Worin besteht dies nun?

Bei der Kompliziertheit dieser und ähnlicher Erscheinungen

übungen für das Betreten späterer Stufen mit Recht schon auf früheren vornimmt. Vgl. dazu die betreffenden Abschnitte unter Lehrverfahren und Plan.

[1]) Auf andere Entwicklungslinien des Zahlbegriffs wird **später noch** hingewiesen werden.

[2]) Und doch lebten in diesem hier angedeuteten Irrtume ganze didaktische Richtungen. Er ist auch heute noch nicht ganz überwunden, nämlich dort, wo man die Lehraufgaben bestimmter Zeiträume lediglich nach Zahlenräumen abgrenzt.

ist es nötig, daß eine Untersuchung, welche über ihr Wesen und ihren Aufbau zur Klarheit gelangen will, zunächst an die einfachsten Formen herantritt, die die Erfahrung auf diesem und benachbarten Gebieten findet. Solche einfachste Formen sind im Bereiche des Denkens überhaupt — Gedanken, Urteile, Sätze. Sie heben aus einer Gesamtvorstellung irgendein Merkmal heraus, z. B. dieser Baum ist hoch, der Hase springt, Paulus ist ein Apostel usf.

Insofern diese Sätze aus dem Dingbegriff einen Qualitäts- oder Merkmals- oder einen anderen Dingbegriff herausheben, der im ersteren bereits enthalten ist, haben sie analytischen Charakter, nicht — wie die alte Logik glaubte — synthetischen in dem Sinne, daß die beiden Begriffe gewissermaßen einander genähert, dabei miteinander verglichen und nach dieser Prüfung der Möglichkeit der Vereinigung miteinander verbunden würden oder nicht[1]). Sie sind vielmehr schon vorher verbunden und werden durch das „Ur-teilen" getrennt. Alte aber wie neue Auffassung kommen darin überein, daß zwischen zwei Begriffen im Urteil eine **Beziehung** hergestellt worden sei. Man kann nun behaupten, daß fast wichtiger als die Begriffe selbst dieses Feststellen ihrer gegenseitigen Beziehungen sei; denn aus solchem **Feststellen von Beziehungen zwischen den Begriffen** besteht eigentlich unser gesamtes Denken, besteht das, was wir oben Hantierung mit Begriffen nannten.

Das zeigt sich deutlich bei der Betrachtung beliebiger Urteile. Auch das einfachste und kürzeste enthält wenigstens drei Begriffe: außer den beiden, die in Beziehung gesetzt werden, wird noch die Art der Beziehung angegeben. Dies ist auch dann der Fall, wenn der flüchtige Augenschein dem zunächst widersprechen sollte. Es mag dies an ein paar Beispielen gezeigt werden. Daß ein Qualitätsbegriff an einem Dingbegriff erscheint, kennzeichnet man durch das Hilfszeitwort: Das Pferd ist scheckig. Ist der Qualitätsbegriff nur vorübergehend mit dem Sachbegriff zu denken, so benutzt man das finite Verb: Die Sonne geht auf[2]). Soll die Beziehung der systematischen Über- und Unterordnung ausgedrückt werden, so geschieht dies wieder mit dem Hilfszeitwort: Die Kohlarten sind Kreuzblütler. Werden kausale Beziehungen gedacht, so ist wieder das finite Verb nötig: Der Blitz verursacht den Donner, Leid folgt dem Übermute.

Was so im allgemeinen von den Begriffen gilt, das trifft im

[1]) Die analytischen Urteile im Kantschen Sinne würden wir heute bezeichnen als Urteile, bei denen der Prädikatsbegriff ein **wesentliches** Merkmal des Subjektsbegriffs herausgehoben hat.

[2]) Würden überhaupt nur zwei Begriffe genannt werden sollen, so würde die Infinitivform des Verbums genügen. Die finite Form enthält den dritten Begriff, den Beziehungsbegriff, der da besagt, daß die beiden Begriffe Sonne und Aufgehen **die** Beziehung zueinander haben, im Augenblicke der Urteilsfällung als **eine** Vorstellung aufgefaßt zu werden.

besonderen für die **Zahlbegriffe** zu. Sie haben den Charakter des unentbehrlichen Materials; aber das eigentliche Rechnen besteht in der **Feststellung der zwischen ihnen vorhandenen Beziehungen**. Welcher Art sind die?

Beginnen wir mit einem möglichst einfachen Beispiel. Ein Kind darf sich für 3 Pfennig einen Kreisel kaufen. Wenn es einen Fünfer hingibt und einen Zweier zurückerwartet, so hat es Beziehungen zwischen den Zahlen 3 und 5 in mehr als einer Richtung schon erworben. Auf eine der verschiedenen mathematischen Formeln gebracht, könnte die erworbene Erkenntnis lauten: $5-3=2$. Dies Urteil enthält aber nicht drei, sondern fünf Begriffe, nämlich drei Zahlbegriffe, dazu den des „weniger", d. h. in diesem Sinne, daß man vermindern solle, und den des „gleich", offenbar zwei Beziehungsbegriffe. Da aber, wie wir sahen, jedes der angeführten Urteile in drei Begriffen vollständig ist, so läßt sich dies Zahlenbeispiel nicht ohne weiteres mit den gewählten Sachbeispielen auf die gleiche Linie stellen.

Wir haben in dem Zahlenbeispiel nämlich ein **zusammengesetztes Urteil** vor uns und müssen uns der übrigen zusammengesetzten Urteile erinnern, wenn wir hier tiefer eindringen wollen. Als eine verhältnismäßig wenig komplizierte Gruppe dieser zusammengesetzten Urteile sind bekannt die **Bedingungsurteile**. Alle Urteile, in denen kausale Beziehungen gedacht werden, lassen sich in diese Form bringen. So kann man das oben angeführte „Der Blitz verursacht den Donner" auch so aussprechen: Wenn der Blitz erscheint, folgt der Donner. Hier sind fünf Begriffe genannt: der Bedingungsbegriff „wenn", die Erscheinungsbegriffe Blitz und Donner, die Zustandsbegriffe erscheint und folgt. Es ist klar, daß das eigentlich zwei vollständige Urteile sind: Der Blitz erscheint, der Donner folgt — die durch die Beziehung wenn — so verbunden werden[1]). Damit ist zugleich gesagt, daß die vollständige Form eigentlich sieben Begriffe aufweisen müßte, nämlich drei Begriffe in jedem Urteile und außerdem den Bedingungsbegriff, der beide Urteile verbindet. Diese vollständige Form läßt sich herstellen:

Wenn	so	(Bedingungsbegriff.)
der Blitz	der Donner	(Sachbegriff des ersten, des zweiten Urteils.)
ist	ist	(Beziehungsbegriff des ersten, des zweiten Urteils.)
da,	folgend.	(Zustandsbegriff des ersten, des zweiten Urteils.)

Zwischen dieser siebenteiligen und der kurzen dreiteiligen Form sind alle Übergänge möglich, so daß dasselbe Urteil mit dem gleichen

[1]) „Wenn — so" sind natürlich nicht zwei Beziehungsbegriffe, sondern nur Teile des einen. Das geht auch daraus hervor, daß man vielfach den zweiten Bestandteil weglassen kann, ohne den Sinn im geringsten zu ändern.

Sinne auch mittels vierer, fünfer und sechser Begriffe ausgesprochen werden kann, ohne daß eine weitere Untergliederung (durch Attribute usw.) hinzuträte.

Betrachten wir nun nochmals jenes mathematische Urteil, so übersehen wir sofort, daß es ein solches Bedingungsurteil ist, das sich deutlicher so aussprechen läßt: Wenn ich von der Zahlgröße 5 die Zahlgröße 3 wegnehme, so bleibt die Zahlgröße 2 übrig; übersichtlicher:

Wenn	so	(Bedingungsbegriff),
5	2	(Zahlbegriffe),
vermindert wird um	ist	(Beziehungsbegriffe),
3	vorhanden	(Zahl und Zustandsbegriff),
erstes	zweites Urteil.	

Dasselbe zeigt sich bei allen anderen mathematischen Urteilen:

		Beziehungsbegriff:		Beziehungs- u. Zustandsbegriff:	
$3+4=7$	3	vermehrt um	4	ergibt	7
$2\cdot 6=12$	2	in Malbeziehung gesetzt zu	6	„	12
$15:5=3$	15	geteilt durch	5	„	3
$5^3=125$	5	potenziert mit	3	„	125
$\sqrt{16}=4$	16	radiziert mit	2	„	4
$\log 100=2$	100	logarithmiert auf Basis	10	„	2

Wenn drei Winkel liegen in einem Dreieck, so sie sind gleich 180°.
Wenn zwei Größen gleich sind einer Dritten, so sie sind gleich einander[1]).

Die letzten Beispiele wollen zunächst zeigen, daß auch andere mathematische Sätze diesen Charakter der Bedingungsurteile tragen. Sie haben aber im Zusammenhang mit anderen noch einen weiteren Wert. Achten wir nämlich auf die verschiedenen Beziehungen, so sehen wir auf den ersten Blick, daß der zweite Beziehungsbegriff in allen mathematischen Sätzen derselbe ist, während der erste in der mannigfachsten Weise wechselt. Dieser überall wiederkehrende Beziehungsbegriff ist der Begriff der Gleichheit. Er ist freilich nicht zu verwechseln mit dem der logischen Gleichheit[2]). Denn wir wollen in einem mathematischen Satze niemals sagen, daß etwa die Herstellung einer Beziehung identisch sei mit irgend welchem anderen Geschehen (nur von einer anderen Seite betrachtet und

[1]) Die siebenteilige Form des Winkelsatzes läßt sich leicht in die fünfteilige umwandeln: Winkel | in | einem Dreieck (d. h. einem und demselben Dreieck) | betragen | 180°. Oder in eine dreiteilige: Dreieckswinkel betragen 180°.

[2]) Z. B. der Identität: Karo ist unser Hund; oder der Subsumption: der Hund ist ein Säugetier.

darum anders bezeichnet), oder daß sie unter einen bestimmten höheren Begriff gehöre. Bei den mathematischen Sätzen handelt es sich vielmehr darum, daß eine Beziehung zwischen zwei bestimmten Größen einen gewissen Wert, einen Größenwert besitzt. Den gegenseitigen Wert der verschiedenen Größen und aller der Beziehungen, die zwischen ihnen bestehen, anzugeben, darin liegt eigentlich das Wesen aller mathematischen Sätze. Der Beziehungsbegriff, der diese Wertangabe vermittelt, wird wiedergegeben durch die Wörter „ist gleich[1]“. Darum nehmen alle diese Sätze die Form der Gleichung an.

Dieses Vergleichen nimmt nun bei den mathematischen Sätzen des elementaren Rechenunterrichts eine besondere Bedeutung an. Während nämlich sonst irgend welche Beziehungen einander gleichgesetzt werden können (z. B. der Peripheriewinkel ist gleich dem Sehnen-Tangentenwinkel, $a+b=c-d$, $\sqrt{\frac{a}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a}$ usf.), so werden hier, wie an obigen Beispielen gezeigt worden ist, sämtliche rechnerischen Beziehungen gleichgesetzt einem **bestimmten Werte im Zehnersystem.** Der Systemwert erscheint damit gewissermaßen als gemeinsamer Maßstab, der an jede Beziehung angelegt wird, und mittels dessen wir in der Lage sind, die verschiedenen Beziehungen miteinander zu vergleichen. Eine rasche Schätzung läßt die Beziehungen $7 \cdot 8$ und $6 \cdot 9$ als annähernd gleich erscheinen. Die den Systemwert festlegenden mathematischen Sätze aber besagen, daß jene erste Beziehung um 2 größer ist als diese zweite. Ebenso ist die Beziehung $6 \cdot 13$ um 1 größer als $7 \cdot 11$. Weiter stellen wir mit Hilfe des Systemwertes die Gleichheit vieler Beziehungen fest. So bekommt die Multiplikationsbeziehung zwischen den Zahlgrößen 8 und 9 den Systemwert 72. Da nun dieser Systemwert auch erscheint bei der Multiplikationsbeziehung der Zahlgrößen 6 und 12, 4 und 18, 3 und 24, 2 und 36, so lassen sich alle diese Zahlbeziehungen einander gleich setzen[2]. Ebenso lassen sich aber auch $2 \cdot 12$, $30-6$, $10+14$, $96:4$ gleich setzen, nachdem von jeder dieser Zahlbeziehungen festgestellt worden ist, daß sie den Systemwert 24 hat. Im Bilde läßt sich die Sache auch so darstellen: Die ungeheure Menge der verschiedenen Zahlbeziehungen zwischen

[1]) Von den hier möglichen Beziehungsbegriffen — größer, kleiner, gleich — wird in der weit überwiegenden Mehrzahl der Fälle derjenige bevorzugt, der die größte Genauigkeit zeigt.

[2]) Es interessiert hier zunächst nur die Tatsache des gleichen Systemwertes verschiedener Zahlbeziehungen. Die Begründung und der tiefere Einblick in die Faktorenwirkung ist eine kompliziertere Erscheinung und gehört nicht mehr der mathematischen Entwicklungsstufe an, welche die Kenntnis jener Tatsache erwirbt.

den unzählig vielen Zahlgrößen müssen untereinander verglichen werden können. Dabei schwirren so viel Taktarten durcheinander, als es Zahlen gibt, der Einerrhythmus der Zahlenreihe außerdem noch. Sie alle müssen auf einen gemeinsamen Rhythmus gebracht werden, das ist der des Zehnersystems.

Dabei darf nicht der Einwand erhoben werden: Man brauche doch nicht die Systemzahl 6, um zu wissen, daß $3 \cdot 2 = 4 + 2$ und daß $4 \cdot 4 = 2 \cdot 8$ sei. Innerhalb eines begrenzten Zahlenraumes, der bei den meisten nicht wesentlich über den ersten Zehner hinausgeht, bei einzelnen aber auch sehr viel weiter reichen kann, sind wir nämlich in der Lage, anschaulich vorstellend die Zahlen und ihre Beziehungen zu vergleichen. Ein mathematisch Gebildeter erkennt sofort, daß $10 + 14$ gleich ist $2 \cdot 12$, ohne erst jedes für sich auszurechnen, d. h. an den Systemwert zu denken. Er rückt nämlich gewissermaßen in der Vorstellung die eine Zwei von der 14 zur 10. Aber schon die Gleichung $11 + 16 = 3 \cdot 9$ wird auch von mathematisch gut Begabten leichter auf dem Umwege über den Systemwert 27 anerkannt werden. Der Einwand also, daß der Systemwert nicht überall zum Bewußtsein zu kommen braucht, berührt nicht die Tatsache, daß die elementaren Rechensätze sämtlich Gleichungen sind, in denen der Wert einer bestimmten Beziehung zwischen zwei Zahlgrößen mittels eines gemeinsamen Maßes ausgedrückt wird, nämlich mit dem Systemwert.

Alle diese Rechensätze lassen sich daher auf die allgemeine Formel bringen: Die Beziehung m zwischen den beiden Komponenten a und b erhält den Systemwert c. In dieser Formel ist bisher außer den Zahlbegriffen a, b, c der Gleichheitsbegriff betrachtet worden, der hier durch den Ausdruck „erhält" wiedergegeben ist.

Es ist nunmehr nötig, die Aufmerksamkeit auch dem veränderlichen Beziehungsbegriff — in der obigen Formel m — zuzuwenden und damit die Frage zu beantworten: Welches sind die verschiedenen Beziehungen zwischen den Zahlgrößen, die für das Rechnen in Betracht kommen? oder: Welches sind die in Betracht kommenden Rechenoperationen?

Jahrhunderte alte Gewohnheit spricht in dieser Hinsicht von den „4 Spezies" des Rechnens, dem Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Eine andere, höhere Auffassung stellt die Sachlage so dar: Die einfache aneinander reihende Verbindung von Zahlgrößen ergibt die Addition und den Begriff der Summanden: $4 + 3 + 2 = 9$; die Verbindung gleicher Summanden ergibt die Multiplikation und den Begriff der Faktoren: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$; die Verbindung gleicher Faktoren endlich ergibt das Potenzieren: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$. Zu diesen drei Operationen kommen noch ihre „Umkehrungen", nämlich zur Addition die Subtraktion, zur Mul-

tiplikation die Division, zum Potenzieren aber gibt es zwei Umkehrungen, nämlich das Radizieren und das Logarithmieren, womit also die Summe der Operationen von 4 auf 7 anwächst.

Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß auch diese Auffassung noch nicht als ausreichend betrachtet werden kann. Sie ist der praktischen Handhabung, nicht aber dem Wesen der Sache entnommen. Operationen aber, Verhältnisse zwischen den Zahlen, Beziehungen zwischen den Zahlgrößen können nur aus dem Wesen der Zahlen selbst erwachsen. Wer sich darüber klar ist, steht vor der Frage: Warum soll das Potenzieren zwei Umkehrungen haben? Entweder die anderen Grundoperationen, das Addieren und Multiplizieren, haben auch jede zwei Umkehrungen, oder der Begriff der Umkehrung ist mehrfach in verschiedenem Sinne angewendet.

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns zunächst darüber klar werden, welche Beziehungen zwischen den Zahlen möglich sind. Wenn wir die Zahlgrößen 8 und 5 ins Auge fassen, so kann angenommen werden, daß sie als zu gleicher Zeit vorhanden und als zusammengehörig betrachtet werden sollen. Eine volkstümliche Auffassung würde geneigt sein, hierfür die mathematische Formel anzuwenden $8+5=13$. Dem tiefer dringenden Blick aber entgeht nicht das Gefühl, daß das doch nicht recht zusammenstimmt. Er findet in der mathematischen Formel eigentlich etwas anderes verkörpert. Doch sehen wir uns zunächst nach weiteren Möglichkeiten um. Eine andere Art von Beziehungen läge vor, wenn wir uns die Aufgabe stellten, die beiden Zahlgrößen — welche ebenfalls als zu gleicher Zeit vorhanden zu betrachten wären — miteinander zu vergleichen. Auch hier stellt sich dem Schülerdenken eine mathematische Formel zur Verfügung: $8-5=3$. Doch erleben wir hier in noch stärkerem Maße das Gefühl des Widerspruchs, als bei der Anwendung jener ersten Formel. Dazu kommt, daß die zweite Beziehung doch unmöglich eine „Umkehrung" der ersteren sein kann. Sie lassen sich vielmehr dahin erläutern, daß beides eben „Beziehungen" einfachster Art sind, die sich kaum mehr zerlegen, sondern eben nur mit diesem Ausdruck erfassen lassen, so daß man die erste von beiden bezeichnen kann als ein Auf-einander-beziehen im engeren Sinne, das sich gleichgeordnet neben die zweite, neben das Vergleichen stellt und mit ihm zusammen den weiteren Begriff der Beziehung ergibt.

Zusammenfassungen und Unterscheidungen, wie wir sie soeben an diesen Begriffen ausgeübt haben, werden zu noch besseren Ergebnissen führen, wenn wir erst noch weitere Möglichkeiten betrachtet haben.

Neben jener Auffassung, daß die beiden in Betracht kommenden Zahlgrößen als gleichzeitig vorhanden vorgestellt werden sollen, ist

die andere denkbar, daß zunächst nur der eine Zahlbegriff — 8 — gedacht werden solle, und daß ihm dann der andere, die 5, zu folgen hätte mit der Aufgabe, die vorher gegebene Menge zu vermehren. Das wäre freilich eine ganz andere Beziehung zwischen den beiden Zahlbegriffen 8 und 5 als die beiden ersten. Zunächst wäre sie von größerer Kompliziertheit, dann aber auch von anderer Art, insbesondere würde das Moment der Bewegung jener Ruhe gegenüber, die die erstere kennzeichnet, die andere Art des Charakters bestimmen. Jenen „ruhenden" Beziehungen gegenüber könnten wir sie eine fortschreitende oder operative nennen. Denn das wesentliche Merkmal dieser Beziehung würde nicht die Auffassung zweier als gleichzeitig vorgestellter Zahlgrößen sein, sondern die aufsteigende Bewegung innerhalb der Zahlreihe, wobei der Blick von der einen vorhandenen Zahlgröße hinweg und auf eine neu zu gewinnende gelenkt wird. Die vorhandene Zahlgröße ist gewissermaßen der bei jener aufsteigenden Bewegung bisher erreichte Punkt. Aber es ist kein Endpunkt, sondern nur eine Station, ein Stehpunkt, der den Blick nach vorwärts gleiten läßt. Die graphische Darstellung dieser Beziehung würde erfolgen können durch eine gerade Linie, auf der ein bestimmter Punkt die zuerst gedachte Zahlgröße kennzeichnet[1]). Dieser Punkt wird gleichzeitig angesehen als Nullpunkt der zweiten Zahlgröße, deren Endpunkt nunmehr auch den Endpunkt der neuen, der gesuchten Zahl bezeichnet.

74 ⟶ ?

17

Und ihre mathematische Form erfolgt widerspruchslos so: $74 + 17 = 91$.

Von dieser aufsteigenden Bewegung ist aber ohne weiteres eine Umkehrung denkbar, eine absteigende Bewegung. Sie hätte den Sinn, in der Zahlenreihe von einem bestimmten Punkte aus — der ersten Zahlgröße — um ein bestimmtes Stück — die zweite Zahlgröße — zurückzugehen, d. h. tatsächlich eine gewisse Größe hinwegzunehmen, die erste Zahl zu vermindern. Ihre graphische Darstellung bekäme folgende Form:

? ⟵ 82

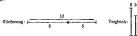
14

Hier hat die erste Zahlgröße die Bedeutung eines Endpunktes, der um ein bestimmtes Stück — die zweite Zahlgröße — weiter zurück

[1]) Man könnte auch, wie es bei kleineren Zahlen tatsächlich geschieht, die ganze Strecke von Null bis zur betreffenden Zahlgröße ins Auge fassen.

verlegt werden soll. Die mathematische Form dieser Beziehung wäre: 82—14=68.

Nunmehr sind wir in der Lage, die verschiedenen Beziehungen zu übersehen und zu vergleichen. Es sind zwei ruhende und zwei fortschreitende. Jene ruhenden aber kennzeichnen sich nun deutlicher als die Beziehung der Gliederung und die des Vergleichs oder der Unterscheidung. Graphisch ließe sich das so darstellen:

Gliederung: 13 — 8 | 5 Vergleich: 8 5

Bisher haben wir nur die Zahlbeziehungen der Additionsgruppe betrachtet. Es bedarf keiner Ausführung, daß auch bei den übrigen Beziehungsgruppen — sowohl bei der Multiplikation, als auch beim Potenzieren — von ruhenden und fortschreitenden Beziehungen gesprochen werden kann. Wenden wir uns zunächst der Multiplikation zu!

Die aufsteigende operative Beziehung besteht hier darin, daß eine gewisse Zahlgröße mehrfach gedacht werden soll: die 6 fünfmal genommen, ergibt den Systemwert 30. Es besteht dabei zunächst die Vorstellung, daß eine gewisse Zahlgröße — 6 — mehrfach — hier fünfmal — aneinandergefügt wird, wodurch eine wiederkehrende Vermehrung der gewonnenen Zahlgröße eintritt. Infolgedessen gelangt man in der Zahlenlinie an den Punkt 30 (der zufällig auch im System eine hervorragende Stellung als ganzer Zehner einnimmt). Bei dieser Vorstellung kommt nun das Moment des Aufsteigens in gleichen Schritten nur unvollkommen zur Darstellung. Zu klarerem Ausdruck gelangt es, wenn wir die Zahlstrecken übereinander anordnen, so daß der Vergleich sich aufdrängt, also das obige Beispiel so darstellen:

6
6
6
6
6

Damit wird aber für die graphische Darstellung der Multiplikation die Fläche als geeigneter befunden. Sie nimmt noch zweckmäßiger die folgende Form an,

□□□□□□
□□□□□□
□□□□□□
□□□□□□
□□□□□□

wobei wir uns die kleinen Quadrate jeder Sechserreihe völlig zusammengerückt denken können, um die fünfmalige Setzung zu verdeutlichen, wobei wir aber auch alle Quadrate aneinanderrücken können, um den Eindruck der Fläche zu erhöhen.

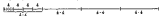
Die **absteigende operative Beziehung** besteht nun darin, die Zahlgröße 30 in derselben Weise wieder abzubauen. War sie vorher gewonnen worden durch fünfmaligen Aufbau einer gewissen Zahlgröße, so wollen wir beim Abbau diese Zahlgröße erforschen, indem wir fragen: Welche Zahlgröße ist es, die bei fünfmaligem Abbau der 30 erscheint? Es ist das die Operation des **Dividierens**, genauer des **Verteilens**. Denn dort, wo wir die Verhältnisse nicht gleich übersehen können (bei drei- und mehrstelligen Zahlen), beginnen wir damit, zunächst einen Teil der ganzen Zahlgröße in solcher Weise abzubauen. Bei 4730 : 5 z. B. verteilen wir zunächst nur 45 Hunderter usf. Eine graphische Darstellung dieses Verteilens müßte aussehen von einer Darstellung der Zahlen im Zehnersystem, auf die später noch zurückzukommen ist.

Die **ruhende Beziehung der Gliederung** oder, wie wir auch sagen können, die Strukturauffassung des Zusammenhangs sieht das obige Bild der fünf Sechsen fertig vor sich. Sie wird sich der Teile bewußt, die zusammengetreten sind, um das Ganze zu bilden: 30 = 5 · 6. Sie bedeutet hier also das Zerlegen in Faktoren.

Die **ruhende Beziehung des Vergleichs**, die Strukturauffassung des Unterschieds, vergleicht die beiden Zahlgrößen der 6 und der 30 und fragt: Wie oft erscheint die eine in der anderen? Es ist die Operation des **Enthaltenseins** oder des **Messens**. Sie schreibt 6 in 30 geht 5 mal. —

Die Gruppe der **Potenzoperationen** läßt sich nunmehr noch rascher erledigen. Die **aufsteigende operative Beziehung** ist natürlich das **Potenzieren** selbst: $4^3 = 64$. Das heißt, es wird der Systemwert festgestellt, der jener Beziehung entspricht, da man die Zahlgröße 4 dreimal mit sich selbst multipliziert. Als graphisches oder entsprechendes Darstellungsmittel möchte man hier gern an den Körper denken, in obigem Beispiel an den Würfel. Diese Darstellungsform reicht aber nur bis zur 3. Potenz. Das ist eine Unzulänglichkeit. Wir wenden uns darum zur Linie und finden sie ganz geeignet zur Darstellung des Begriffs 4^3.

4 4 4 4

4 · 4 | 4 · 4 | 4 · 4 | 4 · 4

Die ganze Strecke stellt dar 4^3.

Besser noch eignet sich die Fläche dazu. Die wagerecht aneinanderliegenden 4 Millimeterquadrate in der linken oberen Ecke bedeuten 4; das kleine Quadrat von 16 qmm Größe bedeutet 4^2; die

wagerecht nebeneinander liegenden 4 derartigen Quadrate 4^3; die untereinander liegenden Reihen, also das Quadrat von $16 \cdot 16$ qmm ist 4^4; endlich die ganze Fläche 4^5.

Man sieht, daß auch die 7., 9., überhaupt die ungradzahligen Potenzen die Form des Rechtecks, die gradzahligen die Form des Quadrats annehmen.

Die a b s t e i g e n d e o p e r a t i v e Beziehung fragt nun nach der Zahl, welche man eine bestimmte Anzahl mal mit sich selbst multiplizieren mußte, um zu der vorhandenen Gesamtzahl zu gelangen. Sie ist gegeben im Wurzelziehen: $\sqrt[5]{1024} = 4$.

Die ruhende Beziehung der G l i e d e r u n g besteht im Überblick über die Teile: $729 = 9^3$. Die ruhende Beziehung des V e r g l e i c h s endlich ist das Logarithmieren: log 343 zur Basis $7 = 3$ oder mit der üblichen Benutzung der Briggschen Logarithmen: $\log 100 = 2$. Es ist ein Messen mit der Frage: Wie oft muß ich — in obigem Beispiel — die 7 mit sich selbst multiplizieren, um 343 zu erhalten?

Nunmehr ist es möglich, den Ü b e r b l i c k ü b e r d i e Z a h l b e z i e h u n g e n noch klarer zu gestalten. Die aufsteigende fortschreitende Beziehung ist in jeder Gruppe ein Hinzufügen, ein Vermehren. Die absteigende fortschreitende Beziehung ist überall ein Wegnehmen, ein Vermindern. Die ruhende Gliederungsbeziehung erscheint als ein Zerlegen in Summanden, in Faktoren, in Potenzen. Die ruhende Vergleichsbeziehung endlich ist allenthalben ein Messen, ein additives Messen, das sich für den Unterschied interessiert, wenn die 17 mit der 19 verglichen wird; ein multiplikatives Messen, wenn die 6 mit der 72 verglichen wird; ein potenziatives Messen, wenn man 5 mit 625 vergleicht. Übersichtlich gestalten sich demnach die Zahlbeziehungen so:

Fortschreitende Beziehung		Ruhende Beziehung	
aufsteigend	absteigend	Gliederung	Vergleich
addieren	subtrahieren	zerlegen in Summanden	addit. Messen = Vergleichen (auch Ergänzen)
multiplizieren	verteilen	zerlegen in Faktoren	mult. Messen = Enthaltensein
potenzieren	radizieren	zerlegen in Potenzen	potenz. Messen = Logarithmieren.

Nachdem so die verschiedenen Zahlbeziehungen durch alle Gruppen hindurch betrachtet worden sind, erübrigt noch, einen vergleichenden Blick den *Gruppen* selber zuzuwerfen. $4+3$, $4 \cdot 3$, 4^3 mögen als Beispiele dienen. In sämtlichen Fällen sind dieselben Zahlgrößen vorhanden, und doch fühlt man bei flüchtigem Hinsehen, daß beispielsweise die 4 jedesmal einen anderen Charakter hat. Wir können uns darüber klar werden, wenn wir statt der reinen Zahlgrößen, der Zahlbegriffe, Stellvertretungsvorstellungen heranziehen: 4 ℳ und 3 ℳ, 4 ℳ mal 3 ℳ, 4 ℳ hoch 3 ℳ. Wir sehen: Sinn hat jetzt nur noch das erste Beispiel. Beim zweiten müssen wir unbedingt einmal die Bezeichnung weglassen, also 4 mal 3 ℳ oder 4 ℳ mal 3; beim Potenzbeispiel aber ist auch 4 ℳ hoch 3 noch sinnlos, was ja schon aus dem Multiplikationsbeispiel hervorgeht. Die Potenz verträgt daher überhaupt keine Benennungen der in Beziehung zueinander stehenden Zahlgrößen[1]).

An dem Multiplikationsbeispiel sehen wir also am deutlichsten, daß die beiden in Beziehung zueinander tretenden Zahlen einen *verschiedenen Charakter* haben: die eine läßt sich dinglich, stofflich, räumlich vorstellen, die andere nicht; dafür führt diese ein Dasein, das den Charakter der Erscheinung oder der Kraft hat und sich in der Zeit vorstellen läßt. Nennen wir daher die erste eine *Substantialzahl*, die andere eine *Funktionalzahl*, wofür auch die Ausdrücke passive Zahl und aktive Zahl zu brauchen wären.

Hiernach ließe sich der Unterschied in den Beziehungsgruppen auch so darstellen: In der Additionsgruppe erscheinen die Beziehungen zwischen zwei passiven Zahlen, in der Multiplikationsgruppe die zwischen einer passiven und einer aktiven Zahl, während die Potenzgruppe lediglich mit aktiven Zahlen arbeitet[2]).

Freilich bedarf die oben ausgeführte Unterscheidung der drei Operationsgruppen noch einer leisen Abschwächung. Der uns typisch erscheinende Rechenfall ist der der Multiplikation, wo eine Substantialzahl mit einer Funktionalzahl zusammentritt. Es ist dies verständlich an einem Punkte, wo die konkrete Grundlage des Rechnens mit einer gewissen Entwicklungshöhe der Abstraktion gleichzeitig in Erscheinung tritt. Dieser Gedanke ist nun so stark wirksam, daß

[1]) Etwas völlig anderes ist es natürlich, wenn man eine Potenz, nachdem sie ausgerechnet ist, mit einer Benennung versieht, z. B. 4^3 cbm, 10^4 Pfennig. Das heißt aber, es sollen soviel cbm, soviel Pfennige gedacht werden, als die Potenz 4^3, 10^4 angibt.

[2]) Charakteristisch tritt dies auch hervor in den wissenschaftlichen Ausdrücken, die die in Beziehung gesetzten Zahlen haben: Augend, Addend, Summand, Minuend, Subtrahend sind alles passive Benennungen; dagegen zeigen den Unterschied Multiplikand und Multiplikator, Dividend und Divisor, während der Charakter zweier aktiven Zahlen beim Potenzieren von der Namengebung anscheinend noch nicht erfaßt werden konnte in Basis und Exponent.

auch bei der Additionsgruppe, die sinngemäß nur Substantialzahlen der gleichen Art brauchen kann[1]), dennoch die eine Zahl einen leisen funktionalen Anstrich erhält: die erste Zahl *wird* vermehrt, die zweite *vermehrt* die erste; die erste *wird* vermindert, die zweite *vermindert*. Während also die erste Zahl deutlich passiv erscheint, zeigt die zweite eine Spur von Aktivität.

Andrerseits hat die Potenzgruppe in ihrer ersten Zahlgröße einen Rest von einer Substantialzahl bewahrt. Schon im sprachlichen Ausdruck erscheint er: 5^3 bedeutet, die 5 solle dreimal mit sich selbst multipliziert *werden*. Der mehr passive Charakter der Basis, der mehr aktive des Exponenten ist deutlich zu erkennen. Graphisch läßt sich das so darstellen: Die völlig passive Zahl mag durch einen schrägen, aufwärts gehenden Strich angedeutet werden ╲, die völlig aktive Zahl durch einen ebensolchen abwärtsgehenden ╱. Statt daß nun die Bilder für die drei Operationsgruppen diese Form hätten:

Addieren Multiplizieren Potenzieren

bekommen sie diese:

Addieren Multiplizieren Potenzieren

In der Gliederungsbeziehung tritt der Charakter der passiven und aktiven Zahl weniger hervor, und zwar sowohl bei jenen ($10=7+3$) als auch bei diesen ($100=10^2$). Beim Vergleich dagegen wird man sich des Unterschieds wieder stärker bewußt. Bei „17 verglichen mit 19" erhält die 2 einen stark funktionalen Anstrich; bei 10 in $60=6$ zeigt sich der funktionale Charakter der 6 ganz deutlich; bei 4 ist, um zu 1024 zu gelangen, 5 mal mit sich selbst zu multiplizieren, ist ebenfalls die größere Aktivität der 5 unverkennbar. Das ist verständlich, wenn man erwägt, daß der Systemwert, der als Ergebnis der fortschreitenden Beziehung erschien, jederzeit, auch in der Potenzgruppe, substantialen Charakter hat. Das Ergebnis der Vergleichsbeziehung muß daher mehr oder weniger funktionales Gepräge zeigen.

Nunmehr sind wir auch in der Lage, die **Beziehungsarten** noch klarer zu überschauen als bisher. Wir haben die sogenannten ruhenden Beziehungen von den operativen unterschieden. In diesen letzteren erkennen wir die „Operationen" des Rechenunterrichts

[1]) Man kann nicht einmal Äpfel und Birnen zusammenzählen, wenn man nicht begriffliche Änderungen eintreten lassen will.

wieder, deren Zahl wir nunmehr auf 6 festlegen: 3 aufsteigende und 3 absteigende.

Wenn wir beide Arten gegeneinander halten, so zeigt sich uns das Wesen der operativen darin, daß aus zwei vorhandenen Zahlgrößen eine neue gewonnen wird, die mehr oder weniger substantialen Charakter hat. Die ruhenden aber sind anderer Natur. Bei ihnen handelt es sich nicht um das Gewinnen einer neuen Zahlgröße, sondern darum, die einzelne Zahlengröße immer genauer zu kennzeichnen, sei es, daß dies geschieht durch Angabe der Teile, der Gliederung, sei es durch Angabe der Differenz, der Unterscheidungen von einer anderen bekannten Größe[1]).

Aus dieser Kennzeichnung ihrer Eigenheiten ersehen wir, daß die ruhenden Beziehungen gewissermaßen eine Mittelstellung einnehmen zwischen den Zahlbegriffen und den Operationen, ja, daß sie sogar als seitliche Fortentwicklungen der Zahlbegriffe[2]), und zwar der auf der 3. und den folgenden Stufen erworbenen, angesehen werden können. Eine solche seitliche Fortentwicklung konnten wir schon bei den ersten unbestimmten Zahlbegriffen „mehr" und „weniger" nachweisen, indem ohne Feststellung der eigentlichen Anzahl auch bei größeren Mengen das Mehr oder Weniger mit ziemlicher Sicherheit angegeben wurde. In demselben Sinne entwickeln sich die bestimmten Zahlbegriffe, indem als Begriffselement, als wesentliches Merkmal die ruhenden Beziehungen in sie eingehen, ja fast mit dem Systemwert verschmelzen. Während das 10jährige Kind beispielsweise an der 576 kein größeres Interesse hat als an der 574, so kommt es, daß der mathematisch Interessierte jene 576 mit ganz anderen Augen ansieht, da er sich sofort ihrer Gliederung in 24 : 24 bewußt wird. Ebenso geht es ihm mit 111, 144, 169, 192, 225, 243, 256, 288, 324, 343, 384, 512, 625, 729, 875, 1001, 1024 und vielen anderen[3]).

Fragen wir nun nach der Bedeutung der beiden Arten von Beziehungen, so dürften wir geneigt sein, den fortschreitenden die ungleich größere zuzusprechen. Denn im Schulrechnen wie im Rechnen des praktischen Lebens nehmen sie eine derartig beherrschende Stellung ein, daß ihnen gegenüber die ruhenden Beziehungen kaum in Betracht zu kommen scheinen. In den „Spezies" meint man über-

[1]) Es ist ähnlich, wie wenn wir eine Person beschreiben: Sie hat blaue Augen und blondes Haar, gute Zähne und anliegende Ohren (Gliederung!); sie ist etwas größer als du und hat etwas vollere Wangen, auch sind ihre Bewegungen nicht ganz so gewandt als die deinen usw. (Vergleich!).

[2]) Diese Weiterentwicklung der Zahlbegriffe konnte naturgemäß erst hier betrachtet werden.

[3]) Wir haben schon mehrfach die Erfahrung gemacht, daß solchen Personen z. B. auch die Nummern der Kirchenlieder sich sofort beim Erblicken in Faktoren zerlegen usw.

haupt nur „Operationen", andere Zahlbeziehungen kennt man anscheinend nicht, und auch die mathematischen Formen sind so gut wie gänzlich auf die operativen Beziehungen eingestellt[1]).

Eine solche Bewertung würde aber den Tatsachen nicht ganz gerecht. Denn indem die ruhenden Beziehungen geeignet sind, den einzelnen Zahlbegriff auf eine höhere Stufe der Entwicklung zu heben, erscheinen sie als eine bedeutungsvolle Erleichterung und Sicherung der Ergebnisse der fortschreitenden Beziehungen, der Operationen. Wer in dem oben angeführten Sinne die 384 und die 576 kennt, wird nicht nur ihre Differenz ohne Rechnen mit völliger Sicherheit als 192 bezeichnen, er wird sich auch dessen bewußt sein, daß diese Differenz in der einen Zahlgröße 2 mal, in der anderen 3 mal enthalten ist und selbst aus 8 · 24 besteht usw. Das Kind aber und der ältere Rechner, dessen Zahlbegriffe nicht die weitere Entwicklung mittels der ruhenden Beziehungen gefunden haben, wird langsam ausrechnen und in nicht wenig Fällen 292 oder 182 herausbekommen; in den anderen Fällen aber, da das richtige Ergebnis gewonnen wird, fehlt ihm das Bewußtsein der Sicherheit, was sich darin zeigt, daß er auf den Zuruf „falsch!" aufs neue zu rechnen anfängt.

Auf diese Erleichterung und Sicherung der Operationen mittels entwickelter Zahlbegriffe, der fortschreitenden Beziehungen mittels der ruhenden, wird selbst eine elementare mathematische Bildung nicht verzichten dürfen[2]). Insbesondere ist es notwendig, daß wenigstens die Zahlbegriffe des ersten Hunderters diesen weiter entwickelten Charakter angenommen haben. Daher ist es verständlich, wenn die ruhenden Beziehungen von einzelnen Rechenmethodikern als Grundlage für die Operationen aufgefaßt und behandelt worden sind.

Rückblickend läßt sich die Bedeutung der ruhenden gegenüber den operativen Beziehungen weniger abwägen, als vielmehr treffend kennzeichnen, wenn wir sagen: Diesen kommt die Gestaltungskraft zu, jenen die Beweiskraft.

[1]) Während die aufsteigende operative Beziehung in der mathematischen Form $7 + 3 = 10$, und die absteigende operative in der andern: $10 - 3 = 7$ erscheint, so läßt sich für die Beziehung der Gliederung allenfalls die finden: $10 = 7 + 3$, während die Vergleichsbeziehung dieser Operationsgruppe durch keine der üblichen mathematischen Formen unzweifelhaft ausgedrückt wird. Am genauesten und kürzesten wäre noch: 7 ist um 3 größer als 4.

[2]) Unter Umständen ist ein Stahlfach oder eine Versicherung mehr wert als ein gewisses Kapital. Dabei weist dies Bild ja nur auf die eine Seite der Bedeutung der ruhenden Beziehungen hin.

§ 13. Die Entwicklung der Operationsbegriffe.

Manche Methodiker scheinen der Meinung zu sein, die Operationsbegriffe seien gewissermaßen angeboren; oder sie seien in einem solchen Grade selbstverständlich und vorauszusetzen, daß ihre Bedeutung gegenüber der der Zahlbegriffe völlig in den Hintergrund tritt; oder sie würden zugleich mit den Zahlbegriffen erworben. So schritt die Grubesche Rechenmethode von Zahlindividuum zu Zahlindividuum fort, von der 4 zur 5, zur 6, immer so, daß an jeder Zahl möglichst alle Operationen durchgeführt und gegenseitig in Verbindung gebracht wurden. Und dies geschah nicht nur in einem Zahlenraume, den auch mathematisch minder Entwickelte zu übersehen vermögen, sondern im ganzen ersten und zweiten Zehner. Ja, einzelne Didaktiker gingen weit darüber hinaus und erledigten auch die Zahlen des ersten Hunderters „nach der monographischen Methode".

Der Irrtum, der dieser Methode zugrunde liegt, hat weitgreifende Wirkungen. Darum müssen wir an die Spitze dieses Abschnittes den Gedanken stellen — der uns schon im vorigen Abschnitt vom Wesen der Operationsbegriffe selbstverständlich und geläufig war — daß die Operationsbegriffe etwas von den Zahlbegriffen völlig verschiedenes sind. Das will zugleich sagen, daß sie auch nicht mit ihnen entstehen oder was der irrtümlichen Meinungen mehr sind.

Mancher Lehrer, ja eigentlich jede beobachtende Mutter hat schon die Erfahrung gemacht, daß das Teilen eine Tätigkeit ist, die dem Kinde einer gewissen Altersstufe noch so gut wie fremd ist. Die Erziehung in dieser Richtung beginnt mit der Gewöhnung, einen Teil, d. h. ein kleineres Stück von dem eigenen Gut an andere abzutreten, an die Geschwister[1]) oder an Tiere usw. Und selbst wenn dies Teilen wirklich schon von der Kindesseele gewonnen worden ist, so hat es noch sehr wenig zu tun mit dem Teilen im mathematischen Sinne. Es ist dann noch auf lange Zeit hinaus ein Abtreten: Von einem Teller Nüsse bekommen die Geschwister jedes zwei, und wenn sich noch genügend darauf finden, und sie nicht aufgehoben werden sollen, noch eine oder zwei. Ein Rechnen tritt hier nicht ein, am ehesten noch bei mathematisch besonders Entwickelten, und auch dann erst, wenn eine gewisse, nicht zu niedrige Stufe dieser Entwicklung erreicht ist. Bei vorschulpflichtigen Kindern konnten wir das noch niemals beobachten. Aber daß in jenem kindlichen Teilen eine frühe Vorstufe des mathematischen Teilens gegeben ist, erscheint unzweifelhaft.

[1]) Die ethische Bedeutung mehrerer Geschwister wird hier von mathematisch-psychologischer Seite beleuchtet.

Nicht anders ist es mit dem Hinzufügen. Das Hinzufügen immer neuer Spielsachen zu den alten — neuer Bleisoldaten zu den alten usf. — sieht das Kind gern. Aber festzustellen, wieviel es nun geworden sind, dafür hat das Kind nicht das Bedürfnis, dazu kann es höchstens der Wunsch der älteren veranlassen. Das Mädchen gibt seinen Puppen Namen, der neuen sofort auch einen. Aber wenn man mit ihm rechnen wollte: Erst hattest du 4 Puppen, nun noch eine neue dazu; wieviel hast du nun? dann kommt in den meisten Fällen die Antwort: Nun noch die Bertha. — Ähnlich ist es mit dem Subtrahieren. Im Pfefferkuchenpaket, das auf dem Weihnachtstische lag, werden es immer weniger. Aber wieviel noch drin sind, wenn zwei gegessen wurden, das zu wissen verlangt das Kind nicht. Dadurch werden es doch nicht wieder mehr.

Aus diesen Beispielen geht zweierlei hervor: 1. daß mit dem Gewinnen der Zahlbegriffe durchaus nicht Hand in Hand geht das Gewinnen der Operationsbegriffe; 2. daß das Kind die Operationsbegriffe zunächst in einem ganz anderen Sinne erwirbt, als er für die mathematische Behandlung in Betracht kommt.

Diesen zweiten Gedanken erläutern noch folgende Erfahrungen. Wenn das Kind noch mehr Hunger hat, bekommt es noch mehr Suppe. Zahlen kommen dabei gar nicht in den Bereich des Bewußtseins, etwa wieviel Löffel hinzugefügt wurden und wieviel es nun im ganzen sind. Das Vermindern irgendwelcher Güter geschieht ununterbrochen durch den Gebrauch: die Milch im Tope, die Kohlen im Keller, selbst die Stärke der Schuhsohlen vermindert sich, ohne daß Zahlen in Betracht kommen könnten. Das Malnehmen erfolgt auch täglich. Zweimal darf das Kind einen Apfel nehmen, dreimal hat es sich an die Tür gestoßen, jedesmal holt es dem Vater die Hausschuhe, vielemal kann es den Ball fangen usw.

Angesichts dieser Beispiele könnte freilich der Einwand laut werden: Da sieht man ja, daß das Kind längst mit den Operationsbegriffen vertraut ist, sogar schon, ehe es eigentlich an Zahlen herantritt. Dieser Einwand ist im Wortlaut berechtigt, in seiner Folgerung aber unberechtigt. Denn die Folgerung, welche die betreffenden Methodiker ziehen zu dürfen glauben, lautet: Die Kinder können also, wenn sie die Zahlbegriffe erwerben, zugleich mit den Zahlbegriffen operieren lernen. Der Irrtum, der darin liegt, läßt sich auf die allgemeine Formel bringen: Ein Kind, das an Dingen irgendwelche Tätigkeit ausgeübt hat, könne diese Tätigkeit sogleich auf Begriffe übertragen. So wenig schwer das vielen Erwachsenen auch erscheinen mag, so ist es doch für das Kind etwas völlig Ungewohntes und Neues, das erst zu erlernen wäre. Umgekehrt kann man nicht selten beobachten, wie ein fast 6jähriges Kind wohl schön mit einer nicht geringen Menge von Zahlbegriffen umgehen kann —

cum grano salis — ohne die Operationen zu benutzen. Es zählt alles, was ihm unter die Hand kommt; aber daß man beispielsweise etwas, was man gezählt hat, malnehmen könne, dem bringt es nicht das geringste Verständnis entgegen.

Noch viel mehr gilt das vom Gleichheitsbegriff, von der Gleichheitsbeziehung. Wie die obigen Beispiele zeigen, vermehrt und vermindert und verteilt das Kind seine Schätze, ohne nach dem Ergebnis zu fragen. Es hat 12 Soldaten und bekommt noch 4 dazu. Nun kann es eine ganz große Reihe aufstellen, so lautet sein Ergebnis. Und das Vermindern führt erst dann zur zahlenmäßigen Feststellung, wenn von den vielen Pfefferkuchen noch 2 oder 3 übrig sind. Als es noch 11 waren, frug das Kind nicht nach dem Ergebnis der Verminderung. Beim Verteilen der Nüsse fragt es wohl die Geschwister, wieviel jedes habe; dies geschieht aber nicht, um festzustellen, wieviel jedem zu geben möglich sei, sondern nur, wenn der Zweifel aufgetaucht ist, die einzelnen könnten ungleich viel erhalten haben. Auch die Untersuchungen Meumanns haben wissenschaftlich festgelegt, was wir in obigen Ausführungen an eigenen Beispielen dargetan haben. Er sagt (Abriß S. 379): „Nachdem die Zahlvorstellungen sich entwickelt haben, fehlt dem Kinde jede Fähigkeit, die einfachsten Operationen auszuführen."

Ein Unterricht also, der mit Operationen beginnen wollte, während sich die Kinder noch auf der unteren Stufe der Zahlbegriffsentwicklung befinden, würde sich einer nicht geringen Verkennung der Kindesnatur schuldig machen. Das dürfte auch nach unseren Erfahrungen noch von der Stufe gelten, auf der das Kind die Anfänge der Zahlenreihe erwirbt. Ein solches Beginnen könnte auch keinen anderen Erfolg haben als den mechanischer Abrichtung. Es ist dies hier einer der Punkte, von dem aus ein Licht fällt auf das Mißverhältnis der Ergebnisse unseres Rechenunterrichts zur minutiösen Kleinarbeit der Methodiker, zu dem gesteigerten Ruf nach Übung und zu der Treue der geleisteten praktischen Arbeit.

Eigentlich führt das Kind schon eine Operation aus — wenigstens eine vorbereitende Operation — indem es zählt. Durch vielhundertmaliges Zählen gewinnt es ein zunächst undeutliches, später klareres Bewußtsein dafür, daß man jedesmal eine Einheit hinzufügen müsse, nicht mehr, aber auch nicht weniger, wenn man die nächste Zahl erreichen will[1]. In diesem Sinne sind in dem Zählen

[1]) Noch bei 9jährigen Kindern ist es uns vorgekommen, daß sie beim Zählen an Gegenständen zweimal denselben Gegenstand zeigten, in der Zahlenreihe aber fortschritten. Es ist selbstverständlich nicht die Absicht bei ihnen vorhanden gewesen, dies zu tun, denn selbst ein leiser Hinweis darauf wirkte fast

sämtliche additiven Zahlbeziehungen enthalten oder mindestens vorgebildet. Das Hinzufügen im Vorwärtszählen, das Wegnehmen im Rückwärtszählen, die Gliederung in dem Bewußtsein, daß man vor 9 erst 6, 7 und 8 gezählt habe, der Vergleich in dem verweilenden Blick auf die eben erreichte Zahl, der sich verbindet mit dem Rückblick auf die benachbarte vergangene und dem Vorblick auf die benachbarte kommende. Trotzdem ist das Zählen nicht eigentlich zu den Operationen zu rechnen, sondern bildet nur eine Vorstufe zu ihnen, und zwar — der Hinweis ist bedeutsam — lediglich für die vier additiven Operationen[1].

Die Gewinnung der aktiven Operationen bildet nun die eigentliche erste Stufe. Ihr Durchschreiten läßt sich auflösen in eine Reihe von Schwierigkeiten, die nicht auf einmal, sondern nur nacheinander überwunden werden können. Zunächst sind es vier voneinander gänzlich verschiedene Operationen, deren innere Bedeutung zunächst nur einzeln und dann in Kontrastwirkung erfaßt werden kann. Dazu kommen die Zusammenhänge und die gegenseitigen Beziehungen zwischen den vier Operationen, die nicht vernachlässigt werden dürfen. Endlich sind zwei besondere Schwierigkeiten der Erwerb der Gleichheitsbeziehung und der der mathematischen Form.

Mit dieser Darlegung der in Betracht kommenden Schwierigkeiten soll keineswegs die Reihenfolge ihrer Bewältigung angedeutet sein. Eine solche Reihe läßt sich bisher weder von der praktischen Erfahrung, noch von der psychologischen Wissenschaft aufstellen, weil ja die bisherigen Ergebnisse nicht bloß als Ergebnisse der jeweils in Betracht kommenden Reihenfolge, sondern in noch viel höherem Maße der sonstigen didaktischen Behandlung erscheinen. Der Vertreter der monographischen Rechenmethode behauptet: Meine Kinder haben ausgezeichnet rechnen gelernt. Wir würden hinzufügen: Warum nicht? Auch das psychologisch verkehrteste Verfahren kann ausgeglichen werden durch eine begeisterte und eifrige Lehrerpersönlichkeit einerseits, durch das — trotz unpsychologischen Eingreifens glücklicherweise weiter stattfindende — Wachstum des kindlichen Geistes andrerseits, mittels

beschämend. Aber die Tatsache, daß es noch Kindern dieses Alters manchmal Schwierigkeiten bereitet, ist doch ein Hinweis darauf, daß das Zählen, und selbst das gegenständliche Zählen von der Schule nicht einfach vorausgesetzt werden darf.

[1]) Es möchte gestattet sein, das Wort Operation der Kürze wegen in diesem erweiterten Sinne zu gebrauchen. Um Irrtümer zu vermeiden, soll aber immer von vier additiven oder vier multiplikativen gesprochen werden (worunter die zwei operativen und die zwei ruhenden Beziehungen gemeint sind). Die Freiheit, diesen Ausdruck zu verallgemeinern, glauben wir uns deswegen nehmen zu dürfen, weil dem Kinde auch die ruhenden Beziehungen in der Form des operativen Problems entgegengebracht werden.

dessen das Kind sich selbst der Erkenntnisse bemächtigt, die ein falsches didaktisches Verfahren ihm zunächst nur verbal einprägte. Ebensowenig freilich ist die gegenteilige Behauptung beweiskräftig, z. B.: „Ich bin von der monographischen Methode abgegangen, aus innerer Überzeugung, aber die Not ist nicht geringer geworden." Reihenfolgen sind eben keine Allheilmittel. Aber wie bei allen Krankheiten eine naturgemäße Diät in gewissem Sinne ein Allheilmittel ist, so bei den Nöten des Unterrichts die Herrschaft des Geistes, nicht des Geistes der spekulativen Theorien des Erwachsenen, sondern des Geistes der praktischen Untersuchung und fördernden Beobachtung des Kindes. Darum können hier nur grundsätzliche Erörterungen einiger Hauptpunkte auf psychologischer Grundlage gegeben werden.

Der wichtigste dieser Punkte ist der, daß nicht Klarheit, sondern Verwirrung in den kindlichen Köpfen erzeugt wird, wenn die verschiedenen Operationen durcheinander geworfen werden, ehe das Kind die Möglichkeit gehabt hat, sich in den Sinn der einzelnen einzuleben. Der Einwand, daß die Operationen im Gebrauch des täglichen Lebens durchgeführt und vorgebildet seien, ist nicht stichhaltig. Diese Vorbereitung ist wohl unentbehrlich, aber eine Vorbereitung ist wie überall nicht die Sache selbst. Die Operationen in ihrer Anwendung auf Zahlen sind etwas für den kindlichen Geist so völlig Neues, daß ein einzelnes Auftreten der Operationen psychologische Forderung ist. Erscheint es sonach nicht zweckmäßig, das Kind in mehrere Operationen zugleich einzuführen, so wäre es wiederum das andere Extrem, wenn die Operationen lediglich jede für sich allein auftreten wollten, ohne Beziehungen zu den anderen zu suchen. Erst die Erfassung des Zusammenhangs und der wechselseitigen Beziehungen zwischen ihnen läßt das Kind zur Herrschaft über sie gelangen. Nun ist es klar, daß man mindestens zwei Operationen kennen lernen und bis zu einem gewissen Grade in jeder heimisch geworden sein muß, ehe man sie vergleichen kann. Damit ist ein Vorausgehen der einzelnen Operationen, ein späteres Einsetzen der Zusammenhänge angedeutet.

Was weiter die Gleichheitsbeziehung anbelangt, so läßt sich den Fällen, da sie zugleich mit einer Operation erlangt wird, immer mehr die Erfahrung gegenüberstellen, daß der Elementarlehrer die Gewißheit hatte, daß das Kind wohl für die Gewinnung der Operationsbegriffe reif war, der Gleichheitsbeziehung aber noch kein Verständnis entgegenbrachte. Auch für ihr Eintreten läßt sich also kein psychologisch bestimmter Zeitpunkt angeben, nur der immerhin bedeutsame Grundsatz: Nicht zu früh!

Die mathematische Form endlich kann das Kind erst dann erwerben, wenn ihm auch die Gleichheitsbeziehung geläufig ist. Es ist für das Kind etwas anderes und Neues, wenn es gesagt hat: Erst habe ich 6 Nüsse, dann bekomme ich noch 2 dazu, nun habe ich 8 — und dann dasselbe Ereignis in die Worte kleiden soll: 6 und 2 ist 8, ganz abgesehen von der Zumutung, diesen einen Satz als auf alle entsprechenden Vorgänge anwendbar anzusehen. Was der Verstand des Erwachsenen rasch überblickt und verallgemeinert, das ist für das Kind noch eine unerwartete Erscheinung, die ihm je nachdem Befremden oder Bewunderung oder Freude einflößt. Daß ein solches Erlebnis aber gegebenenfalls mit 5 Wörtern ausgedrückt werden kann, ist eigentlich ein neues ebensolches Erlebnis mit denselben Wirkungen.

Selbstverständlich ist es möglich, Gleichheitsbeziehung und mathematische Form schon im Anschluß an die erste Operationserwerbung darzubieten. Dies scheint heute sogar in sehr vielen Schulen üblich zu sein. Nach den oben dargelegten psychologischen Erkenntnissen müssen wir freilich gegen diese Reihenfolge wichtige Bedenken erheben[1].

Der Entwicklung der ruhenden Beziehungen ist noch mit einigen Worten besonders zu gedenken. Es ist wahrscheinlich, daß die meisten von uns sich nicht erinnern werden, wann und wie sie diese Zahlbeziehungen erworben haben; der Rückblick in die eigene Jugend betont ebenso wie die herrschende Unterrichtspraxis die Erwerbung der operativen Beziehungen des Hinzufügens und Wegnehmens. Und doch ist kein Zweifel, daß wir auch über jene anderen Beziehungen der Gliederung und des Vergleichs verfügen, und unsere Schulkinder ebenfalls, wenn auch in sehr verschiedenem Grade. Auf zwei Wegen kann diese Gewinnung erfolgt sein, die in der Mehrzahl der Fälle beide betreten werden. Zunächst so, daß sich die ruhenden Beziehungen gebildet haben als Folge der Behandlung der beiden operativen. In solchem Sinne ist tatsächlich die Addition und noch mehr die Subtraktion wirksam. Es ist das ein Zeichen für den engen Zusammenhang der Zahlbeziehungen untereinander und besonders auch für die Beherrschung dieses Zusammenhangs, daß einerseits die Assoziationen der Operationsurteile so völlig fest werden, und andrerseits doch so beweglich sind, daß sie sich ohne viel Mühe in die Form einer anderen Operation bringen lassen. Eine solche Wirkung der operativen Beziehungen wird vor allem dort eintreten, wo auf räumliche Vorstellung der Zahlgrößen — und sei es auch nur in der Zahllinie — besonderer Wert gelegt worden ist. Der

[1] Näheres darüber im praktischen Teil unter Lehrverfahren.

andere Weg, die Gliederungs- und die Vergleichsbeziehung zu erwerben, ist der, daß sie tatsächlich für sich geübt worden sind, wenn auch manchmal unter anderem Namen. Zerlegungs- und Ergänzungsübungen, ganz besonders im Anschluß an Zahlbilder, wie vor allem auch am Zehner und Hunderter, sind die Formen, die hier üblich sind. Es ist ersichtlich, daß auf diesem zweiten Wege, der die in Betracht kommenden Übungen bewußt zum Gegenstand unterrichtlicher Behandlung macht, die größeren Wirkungen erzielt werden. Bezüglich der Entwicklung der Operationsbegriffe und Operationsurteile im allgemeinen aber dürften diese Darlegungen zeigen, wie einflußreich der genossene Unterricht auf jene Entwicklung gewesen ist.

Als eine neue, besondere, zweite Stufe dieser Entwicklung muß es angesehen werden, wenn wir die **multiplikativen Zahlbeziehungen** gewinnen. Das bestätigt die Erfahrung tausendfach. Wenn ein Kind 2 Nüsse erhalten hat und noch 2, und noch 2, und noch 2, so kann es das auf einer gewissen Stufe wohl vorstellen, auf einer kaum höheren auch auszählen. Wer aber behaupten wollte, es sei auf dieser Stufe zu der Erkenntnis gelangt, daß es 4 mal 2 Nüsse bekommen habe, der befindet sich in einem psychologischen Irrtum[1]). Das geht ja auch aus dem Wesen der multiplikativen Zahlbeziehungen hervor: das Erscheinen der Funktionalzahl zeigt deutlich den ausgesprochen abstrakteren Charakter dieser Beziehungen. **Abstraktionen auf irgendeinem Gebiet entsprechen aber einer höheren Entwicklungsstufe, als die ist, welche in dies Gebiet ohne Abstraktionen eindringen kann.**

[1]) Dieser Irrtum kann veranlaßt sein durch mangelhaftes Beobachten, durch unberechtigten Schluß vom Nachsagen des Kindes auf sein Verständnis; oder dadurch, daß man dem Kinde logische Gedankengänge andichtet, wo es nur einzelne „zwingende“ Fragen des Erwachsenen beantwortet hat (hierbei hatte der Erwachsene den streng logischen Gang, aber das Kind merkt nichts davon). Unsere übliche Rechenmethodik ist von dieser selbsttrügerischen Art: Wieviel Nüsse hast du zuerst erhalten? 2. Wieviel dann? 2. Dann? 2. Dann? Wieder 2. (Man merkt hier schon, daß das Kind auch „2“ antworten würde, wenn der Lehrer mit einiger Bestimmtheit nach einem 5. Paare früge.) Wieviel hast du jedesmal erhalten? 2. Wievielmal hast du 2 Nüsse erhalten? Schweigen. Zähle die Mal! Sage: einmal 2 Nüsse . . . Einmal, zweimal, dreimal, viermal. Wievielmal hast du also 2 Nüsse erhalten? Viermal. Wieviel Nüsse hast du im ganzen? (Das Kind zählt leise von vorn: 1, 2, 3 . . .) 8. Wieviel sind also 4 mal 2? 8. Glaubt wirklich jemand er habe hiermit dem Kinde eine Multiplikationsbeziehung beigebracht? Es würde kaum eine größere Selbsttäuschung geben als diese. — Der vorstehende Hinweis auf das übliche Lehrverfahren hätte eigentlich an späterer Stelle stehen können. Wir glaubten aber, er würde hier noch besser seine Dienste tun. Diese sollen darin bestehen, die Aufmerksamkeit des Lehrers auf die Beobachtung des Kindes und auf die unvoreingenommene Beobachtung der Erfolge seines eigenen methodischen Wirkens zu richten.

Es war daher ein nicht geringer Fehlgriff, wenn man in „monographischer Zahlbehandlung" zugleich mit der Einführung in die Zahlbegriffe des ersten Zehners auch die multiplikativen Zahlbeziehungen an die Kinder heranbrachte. Wir werden das bei späterer Gelegenheit noch näher auszuführen haben.

Bei den multiplikativen Beziehungen gilt es nun in der Hauptsache dieselben Teilziele zu erreichen wie bei der additiven. Es müssen also 4 verschiedene Operationen innerlich erfaßt werden: Malnehmen, Verteilen, Zerlegen in Faktoren und Messen oder Enthaltensein[1]). Dazu müssen dann die Beziehungen gewonnen werden, welche zwischen den 4 Operationen bestehen, das Messen muß z. B. verglichen werden mit dem Teilen, mit dem Zerlegen in Faktoren usw. Endlich ist die mathematische Form zu gewinnen, und zwar sowohl nach ihrer sprachlichen wie schriftlichen Seite. Eine strenge Reihenfolge ist damit ebensowenig ausgesprochen als bei den additiven Beziehungen. Grundsätzlich unterscheiden sich beide Gebiete eigentlich nur darin, daß die mathematische Form, welche früher als besonders ins Auge zu fassende Teilstufe erschien, jetzt überall leichter anzuschließen ist, weil alle Voraussetzungen für sie schon vorliegen. Der Fortschritt innerhalb dieser Stufe kann daher bestimmt werden von der Operation allein. Dabei mag auch die Frage offen bleiben, ob als 2. Operation zweckmäßig das Verteilen oder das Messen gewählt wird. Nach unseren Erfahrungen scheint letzteres dem kindlichen Verständnis näher zu liegen.

Die 3. Stufe der Entwicklung der Operationsbegriffe und Operationsurteile erstreckt sich auf die Potenzialbeziehungen und geht im allgemeinen über den Rahmen des Volksschulrechnens hinaus; in nicht zu seltenen Fällen wird eine erste Einführung versucht, die sich freilich meist mit dem Potenz- und Wurzelbegriff und Anwendungen allereinfachster Art begnügt. Die übrigen allgemeinen Bildungsanstalten haben im Bewußtsein der Bedeutung dieses Gebiets eine mehr oder minder eingehende Behandlung in ihren Plan aufgenommen.

Als Unterstufen erscheinen auch hier die betreffenden Operationen selbst und ihre Zusammenhänge, kaum noch ihre mathematische Form. In viel entschiedenerer Weise, als es auf den vorhergegangenen Gebieten der Zahlbeziehung möglich ist, wird hier die einzelne Operation akzentuiert. Das geht so weit, daß nicht selten die verschiedenen Operationen den Lehraufgaben verschiedener

[1]) Es ist deutlich ersichtlich, wie die Anwendung des Ausdrucks Operationen auch auf die ruhenden Beziehungen hier schon einen höheren Grad von Berechtigung zeigt. Die Ursache dafür liegt im Auftreten der Funktionalzahl.

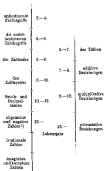
Jahrgänge zugewiesen werden. Dem darf vom psychologischen Standpunkte aus keineswegs die Berechtigung versagt werden. Denn infolge des Auftretens zweier Funktionalzahlen bildet jede Operation eine ihr eigentümliche Technik aus, das Ergebnis zu gewinnen. Dadurch unterscheiden sich aber die Operationen dieser Gruppe in viel höherem Maße voneinander als die Operationen der übrigen Gruppen. Dagegen tritt so gut wie völlig zurück als Sonderaufgabe die Gewinnung der mathematischen Form. In der ersten Gruppe war sie eine hochbedeutsame Erwerbung, hier ist sie nicht nur Symbol, sondern fast ausschließliches Vorstellungssubstrat der immer abstrakter gewordenen mathematischen Beziehungen und ihr selbstverständliches und geläufiges Darstellungsmittel. Wichtig bleibt aber auch auf dieser Stufe die Gewinnung der Zusammenhänge. Das Eindringen in sie bietet erst eigentlich die Gewähr für die Beherrschung der Operationsgruppe. In der Tat wird ein nicht unwesentlicher Teil der Behandlung gerade diesem Gedanken gewidmet.

Überblicken wir die Entwicklung einerseits der Zahlbegriffe, andrerseits der Zahlbeziehungen, so liegt es außerordentlich nahe, den Versuch zu machen, beide Entwicklungsreihen nebeneinander zu stellen und die einzelnen Stufen zeitlich zu begrenzen. Dies ist aber viel schwerer, als man zumeist denkt. Auf die Verschiedenheit der Anlagen braucht nur hingewiesen zu werden. Sie beeinträchtigt einen solchen Versuch nicht wenig. Dazu kommen aber noch zwei andere Faktoren, die — wirklich wie Faktoren im mathematischen Sinne multiplizierend und dividierend — einen derartig starken Einfluß ausüben, daß eine gute Begabung zur höchsten Blüte entwickelt, aber auch ganz zurückgedrängt werden, eine mittlere zu unerwarteter Entfaltung gebracht werden, aber auch völlig verkümmern kann. Diese Faktoren sind zu suchen einmal in den Einflüssen des häuslichen Lebens, wobei das vorschulpflichtige Alter besondere Bedeutung hat. Und sodann in den Einflüssen eines guten, mittleren oder schlechten Unterrichts[1]). Wenn trotzdem der Versuch einer solchen Aufstellung gewagt wird, so soll er hingestellt werden als das Ergebnis jahrelanger psychologischer Beobachtung, die sich sowohl auf mathematische wie auf allgemeine Fähigkeiten bezog, als ein Ergebnis aber, das der Nachprüfung durch die wissenschaftlich interessierte Lehrerschaft und der exakten Feststellung auch mittels experimenteller und statistischer Methoden noch bedarf.

[1]) Wir werden noch an anderer Stelle das ausführen. Hier mag der Hinweis gestattet sein, daß ungezählte Millionen des Nationalvermögens von einem guten Rechenunterricht abhängig sind. Was die Schulen überhaupt kosten, kann allein schon der auf wissenschaftlicher Grundlage aufgebaute Rechenunterricht einbringen.

unbestimmte Zahlbegriffe	2.—4.
die ersten bestimmten Zahlbegriffe	4.—6.
die Zahlreihe	6.—8.
das Zahlsystem	8.—10.
Bruch- und Dezimalzahlen	10.—12.
allgemeine und negative Zahlen[1])	13.—
irrationale Zahlen	
imaginäre und komplexe Zahlen	

5.—7.	das Zählen
7.—9.	additive Beziehungen
9.—12.	multiplikative Beziehungen
13.—	potenziative Beziehungen

Lebensjahr

Es ist noch die Frage zu beantworten, wie jede einzelne dieser Beziehungen erworben und Eigentum unseres Geistes wird. Da ist zunächst die Meinung abzuweisen, die hier und da in methodischen Schriften noch anzutreffen ist, als sei die Gewinnung der Beziehung nichts anderes als eine kompliziertere oder intensivere, klarere Art des Zahlvorstellens[2]). Diese Meinung rührt her von der Betrachtung und eingehenden Behandlung der ruhenden Beziehungen So wichtig diese nun sind, so haben sie in der Entwicklung doch nicht primäre Geltung, sondern sekundäre: sie stellen sich erst ein, nachdem Beziehungen operativen Charakters erworben und ausgeübt worden sind.

[1]) Vom 13. Jahre an verzichtet die Volksschule auf die Erweiterung des Zahlbegriffs und treibt in der Hauptsache Anwendungsrechnen.

[2]) Vertreter der Zahlbildermethode neigen dazu.

Damit ist auch der Weg angedeutet, auf dem allein die Operationen gewonnen werden, nämlich durch ihre tatsächliche Ausführung, nicht durch Betrachten der Möglichkeit. Das Kind lernt nur addieren, wenn es wirklich vielemal hinzugetan hat, lernt nur subtrahieren, wenn es oft genug weggenommen hat, lernt malnehmen lediglich durch wirkliches mal-Nehmen, lernt teilen nur im Teilen.

Daß die Entwicklung tatsächlich diesen Verlauf nimmt, werden jene bezweifeln, die sich nicht besinnen können, in der Schule wirklich Nüsse oder Zucker oder sonst etwas „geteilt“ zu haben. Sie glauben dann gern, sie hätten eine andere Entwicklung zurückgelegt. Das ist aber ein Irrtum, und zugleich ein Mangel jenes Unterrichts. Dieser baute nur auf den häuslichen Voraussetzungen, die das Kind mitbrachte. Bei geistig reifen Kindern, die im Vorstellen schon ziemlich geübt sind, genügt diese häusliche Grundlage. Dies ist aber nicht der Fall bei der großen Zahl der mittleren Begabungen, und erst recht nicht bei den später Reifenden und den Schwachen. Der Hinweis auf die häusliche Grundlage mag vielleicht manchen, der einen guten Rechenunterricht zu erteilen glaubte, nachdenklich stimmen: Nicht also das Zahlvorstellen, auch nicht das Vorstellen der Operationen soll der eigentliche Weg sein zur Gewinnung dieser Beziehungen. Und er kommt mit einem dritten Einwand: Das Wichtigste bei der Gewinnung der Zahlbeziehung, der Operationen ist die Übung. Dabei versteht er unter Übung sogenannte „tägliche Rechenübungen“, vor allem das in jeder Stunde erfolgende Aufsagen des Einmaleins und ähnliche. Er behauptet von ihnen, daß diese Beziehungen auswendig gelernt werden müßten, daß sie in Fleisch und Blut übergehen müßten. So richtig es nun an sich ist, daß ein Rechnen nur möglich ist, praktisch möglich ist, wenn diese Beziehungen zu vollster Bereitschaft im Bewußtsein gelangt sind[1]), so falsch wäre es andrerseits, die Übung als eine Bedingung oder als eine Form des Erwerbs anzusprechen. Sie bedeutet Befestigung, Sicherung, aber nicht Erwerb.

Der Entwicklungsgang jedes Operationsfalles ist vielmehr der, daß er handelnd erworben werden muß; daß er durch das wiederholte Ausführen immer mehr an Klarheit zunimmt und infolgedessen immer rascher und richtiger erkannt wird; die wiederholte Erkennung aber erst führt zur mechanisierten Bereitschaft. Mit anderen Worten: Jeder Operationsfall, wie jede Operation als Zusammenfassung vieler Fälle entwickelt sich in den drei Stufen

[1]) „Mechanische Fertigkeit oder Beherrschung der Technik ist für jede Kunst wichtig und für den Schüler eine Quelle wirklicher Freude.“ Branford, Betrachtungen über mathematische Erziehung, S. 296.

des gefühlsbetonten Erwerbs, der adäquaten Assimilation und der mechanisierten Reproduktion.

Völlige Bereitschaft der wichtigsten Operationsfälle ist der Höhepunkt der Entwicklung auf diesem Gebiet. Er muß angestrebt werden überall da, wo ein gewisser Abschluß der mathematischen Bildung — und sei es auch nur eine elementare — in Frage kommen soll. Er muß aber auch angestrebt werden, weil mit ihm die Grundlage gewonnen wird, auf welcher der Oberbau, der eigentliche Zweckbau der mathematischen Bildung aller Grade zu errichten ist, die mathematische Anwendung. Zu ihr wenden wir uns im folgenden Abschnitt.

§ 14. Die Anwendung der Operationen auf die Fälle des Lebens.

Die Mathematik hat von jeher gegolten als diejenige Wissenschaft, deren Ergebnissen man uneingeschränkte Gewißheit und Sicherheit zuspricht. Keine von allen anderen Wissenschaften kommt ihr in dieser Hinsicht gleich. Denn bei allen anderen ist menschliche Beobachtung und Beobachtungsfähigkeit irgendwie beteiligt und beeinflußt die Ergebnisse. Dies schien bei der Mathematik überhaupt nicht möglich, weil sie das Gebiet der reinen Abstraktionen nie verläßt. So wurde sie die oberste, die heilige, die wirkliche Wissenschaft, die Wissenschaft der reinen Theorie.

Und doch ist keine Wissenschaft auch nur annähernd so praktisch wie sie, keine greift so in alle Gebiete des Lebens ein, keine ist so grundlegend nötig für das Leben, für das Kulturleben allerdings. Durch sie wird die Astronomie zur Wissenschaft und gewinnt die Herrschaft über Zeit und Weltanschauung. Durch sie wird die Psychologie zur Wissenschaft und stellt neben die Kausalität des Universums die Kausalität des Geistes. Und zwischen diesen beiden Polen, zwischen Astronomie und Psychologie, liegen die Wissensgebiete der Geographie und Geschichte, die durch die Mathematik den Charakter denkwürdiger Anekdotensammlungen verloren, die Gebiete der gesamten Naturwissenschaften, die durch sie erst „exakt" wurden. Daneben begrüßen Sprache und Religion dankbar die Unterstützung, die sie in Maß und Zahl finden. Unsere Kunst — Tonkunst und Baukunst voran — ist ganz mathematisch durchdrungen, und unsere Technik ist der Mathematik eigenes Kind. Die Lebensgebiete der Verwaltung und des Rechts, der Volkswirtschaft und Politik, des Handels und des Verkehrs, der Verteidigung und Veredlung der Völker, unser Schaffen und Verbrauchen, unsere gesamte Organisation des Lebens, ja unsere gesamte Kultur steht ganz und gar unter

dem praktischen Einfluß der theoretischsten Wissenschaft, der Mathematik.

Praktisch ist sie auch noch in einer anderen Hinsicht, in ihrer Wirkung nämlich auf die sittliche Entwicklung. Denn der mathematisch Gebildete hat zwei Tugenden erworben, die von hervorragender Bedeutung sind: Ökonomie des Handelns, d. h. er läßt keinen Wert untergehen, auch keinen Zeitwert, und Maßhalten in allen Dingen, d. h. Selbstbeherrschung.

Angesichts dieser praktischen Bedeutung der Mathematik erhebt sich die Frage: Entspricht dieser Bedeutung irgendeine Seite unseres mathematischen, insbesondere unseres Rechenunterrichts? Und die Antwort weist hin auf physikalische und chemische, geometrische und astronomische, kommerzielle und volkswirtschaftliche Berechnungen in den Lehrbüchern der Mathematik; auf die bürgerlichen Rechnungsarten des elementaren Rechenunterrichts; endlich auf allerhand sonstige „angewandte Aufgaben", welche ja den gesamten Rechenunterricht von der Unterstufe bis zur Oberstufe begleiten.

Hier aber setzt auch jene Klage ein: Was der Unterricht Gutes gewirkt hat, hält nicht vor. Kaum sind die Jungen, die Mädchen ein paar Jahre der Schule entwachsen, dann sind die meisten von ihnen nicht mehr imstande, auch nur einfachere Rechenaufgaben zu lösen. Sie haben vergessen, wie man irgendeine Aufgabe anpackt, das „Lösungsverfahren" ist ihnen abhanden gekommen. Uns aber kommt Kerschensteiners treffendes Bild von den blankpolierten Kupferkesseln in den Sinn.

Angesichts dieser Spannung zwischen der praktischen Bedeutung des Faches und der praktischen Wirkung des Unterrichts muß die Frage nun so gestellt werden: Ist mit dem Erwerb der Zahlbegriffe und der Zahlbeziehungen die mathematische Bildung gegeben? oder auch: Ist der Besitz der Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen ausreichend, um den mathematischen Anforderungen des Lebens zu genügen? Bei vielen lautet die Antwort nicht unbedingt ja. Sie sagen: Wenn Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen völlig beherrscht werden, dann heißt es einfach weiter nichts als üben und immer wieder üben; und sie stellen die Gegenfrage: Was soll denn dann noch nötig sein? Andere aber antworten mit nein, Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen genügen nicht. Und sie wenden — mathematisch gesprochen — zunächst den indirekten Beweis an: Genügten sie, dann müßten Kinder und Schüler in dem Alter, da sie noch völlig über beides verfügen, auf der höchsten Stufe ihrer mathematischen Bildung stehen, später aber wieder herabsteigen. Darf man das annehmen? Doch wohl nicht. Denn das würde doch den Bildungsbegriff identisch machen mit Gedächtnis. Allgemein ist da

gegen die Ansicht, daß man an Bildung — auch an mathematischer Bildung — im Laufe der Jahre überhaupt nicht abnehmen, sondern nur zunehmen könne; und daß selbst auf Gebieten, wo alle Übung ruht, die vorhandene Bildung durch Wechselwirkung mit anders gearteter neuer sich vertieft.

Dem schließt sich der **direkte** Beweis an. Er läßt sich auf zweifache Art führen, als Induktions- und als Analogiebeweis.

Wenn wir den Erwerb der Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen voraussetzen, wenn wir von hier aus vorwärts blicken, um auf das zu sehen, was **noch** nötig ist, so erscheinen uns Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen als **assoziatives** Material, das **apperzeptiv** zu verwerten ist. Das heißt, jenes Material steht uns zur Verfügung, und unsere jeweilige Aufmerksamkeitsrichtung bestimmt, welches von dem Materiale zur gegenwärtigen Verwendung zu kommen hat. Diese Verwertung meint gewiß mancher mit seinem Ausdrucke „Übung". Aber diese Bezeichnung ist hier nicht am Platze; denn auch die Überführung der zunächst apperzeptiv gewonnenen Zahlvorstellungen und Beziehungsvorstellungen in Zahlbegriffe und Beziehungsbegriffe und ihre Mechanisierung zu assoziativem Material kann auch nur auf dem Wege der Übung erfolgen. Dagegen leuchtet unmittelbar ein, daß man es bei der praktischen Anwendung mit einer **Ausübung**, einer Auswahl, einer Wahlhandlung zu tun hat. Das ist aber eine anders geartete, höhere, weil komplizierter geistige Tätigkeit.

Ein Beispiel mag das ausführen. Es soll ausgerechnet werden, mit welcher täglichen Menge von Schwarzbrot und Quark (Magerkäse) ein erwachsener Mann bestehen könnte — von Nebenumständen abgesehen. Dazu sind zunächst folgende Zahlenangaben notwendig:

Sein täglicher Bedarf an

	Eiweiß,	Fett u.	Kohlehydraten	
sei	118	88	400 g[1]);	
Quark enthalte	33,8	11,1	4,1 %,	
Roggenbrot	4,7	0,6	47,9 %	von dem betr. Nährstoff.
Endlich sei	5	3	1	das Verhältnis der Nähr-

werte bei gegenseitiger Vertretung (nach Tabellen, wie sie in den meisten Rechenbüchern sich finden).

Nun werden folgende Erwägungen und Rechnungen angestellt: Von vornherein steht fest, daß die Lösung der Aufgabe auf verschiedene Art möglich ist, da sich ein Nahrungsmittel mit einem

[1]) Wir können uns angesichts der Kriegsnahrung nicht des Eindrucks erwehren, als wenn bei diesen Angaben starke körperliche Leistungen vorausgesetzt würden.

anderen innerhalb gewisser Grenzen auswechseln läßt, ohne daß das Ergebnis erheblich geändert wird. Aber die möglichen Lösungen müssen die Wirklichkeit berücksichtigen. Fragen wir sie, so hören wir, daß ein erwachsener Mann täglich 2 Pfund = 1 kg Schwarzbrot verbrauchen kann. Darin würden nach jenen Angaben 47 g Eiweiß, 6 g Fett und 479 g Kohlehydrate enthalten sein. Rechnerisch setzt diese Feststellung voraus, daß verstanden wird der Begriff der Gewichtsprozente, und daß der Prozentbegriff selbst auf die Zahl 1000 mechanisch rechnend übertragen werden kann. Vergleicht man nun dies Ergebnis mit dem Bedarf:

1 kg Roggenbrot:	47 g Eiweiß	6 g Fett	479 g Kohlehydrate,
Bedarf:	118 g „		400 g „
so zeigt sich	— 61 g Eiweiß	— 82 g Fett	+ 79 g Kohlehydrate,

also ein Restbedarf bei Eiweiß und Fett, ein Überschuß bei Kohlehydraten. Nun ist sachlich zu wissen nötig, daß der Überschuß zunächst für den Fettbedarf in Betracht kommen kann; er deckt etwa (hier ist der Nährwert von 79 g Kohlehydraten umzusetzen in den von $\frac{79}{3}$ g Fett) 26 g.

Es bleibt als weiterer Restbedarf — 61 g Eiweiß, 56 g Fett, die zunächst durch eine gewisse Menge Quark gedeckt werden könnten. Da in 100 g die angegebenen Mengen 33,8 g Eiweiß, 11,1 g Fett und 4,1 g Kohlehydrate enthalten sind, so

in 200 g Quark	+ 67,6 g Eiweiß	22,2 g Fett	8,2 g Kohlehydrate,
das ergibt	+ 6,6 g Eiweiß	— 33,8 g Fett	+ 8,2 g Kohlehydrate,

$$\begin{array}{r} +\ 2{,}7 \\ +11 \\ -20\ \text{g}, \end{array}$$

also einen Überschuß an Eiweiß und Kohlehydraten, einen Bedarf an Fett. Der Ausgleich erfolgt wieder durch Umrechnung dergestalt, daß 8,2 g Kohlehydrate dem Nährwert von $\frac{8{,}2}{3}$ = etwa 2,7 g Fett entsprechen, während die 6,6 g Eiweiß dem Nährwert von $\frac{6{,}6 \cdot 5}{3}$ = 11 g Fett gleichkommen. Daraus ergibt sich, daß der angenommenen Nahrungsmenge von 1 kg Schwarzbrot und 200 g Quark noch 20 g Fett zugesetzt werden müßten, um den angegebenen tabellarischen Wert zu erreichen.

Die Rechnung würde aber hinzufügen: Sollte die fehlende Nährwertmenge (von 60 Einheiten) durch Quark aufgebracht werden,

so würden dazu — da in 100 g entsprechend $33{,}8 \cdot 5 + 11{,}1 \cdot 3 + 4{,}1 = 206{,}4$ Nährwerteinheiten enthalten sind — etwas weniger als der 3. Teil von 100 g, genauer $\frac{100 \cdot 60}{206} = 29$ g, erforderlich sein. Das Gesamtergebnis könnte daher lauten: 2 Pfund Brot und $^1/_2$ Pfund Quark würden den gestellten Anforderungen reichlich entsprechen. —

Aus diesem Beispiel ersieht auch der Neuling, daß die rechnerische Bearbeitung eines praktischen Stoffes etwas ganz anderes ist, als das Hantieren mit Zahlbegriffen und Zahlbeziehungen einschließlich Potenzen und Wurzeln. Nannten wir es vorhin eine höhere Geistestätigkeit, so gilt es nun, diese an der Hand des dargelegten Beispiels kurz zu analysieren. Da ergibt sich folgendes:

1. Nachdem unser Bewußtsein den Wortlaut der Aufgabe nach und nach (d. h. wie die einzelnen Wörter erscheinen) **aufgefaßt** und ihren Sinn **festgehalten** hat, unterstellen wir uns der Wirkung der **Zielvorstellung**; wir stellen uns zu diesem Zwecke nochmals den Sachverhalt genau vor und richten die Aufmerksamkeit auf die auszufüllende Leere.

2. Wir gestalten uns einen **Plan** der Rechnung, teils intuitiv das Ganze erfassend, teils apperzeptiv die Einzelheiten prüfend, die Wirkungen unseres Tuns überlegend, mögliche Ergebnisse einzelner Rechnungsteile abschätzend.

3. Wir verlangen eine **Reihe Zahlangaben** entweder vom Aufgabensteller oder aus objektiven Quellen. Dabei wissen wir genau, zu welchem Zwecke wir die einzelnen Angaben brauchen, und in welcher Form (z. B. in Prozenten) sie nötig sind.

4. Wir beurteilen, **ob die gelieferten Zahlangaben genügen**. Wir arbeiten dabei mit der Bewußtheit, daß eine bestimmte Menge von Zahlangaben nötig ist, um die Rechnung eindeutig zu gestalten; daß eine Überzahl der Zahlangaben die Rechnung erschwert durch die Notwendigkeit, zu prüfen, ob die überzähligen mit den anderen in Einklang stehen usw.; daß aber beim Fehlen von Zahlangaben die Rechnung mehrdeutig wird, und daß dann in irgendeiner Weise zur Selbsthilfe gegriffen werden muß, für die wir die Verantwortung tragen.

5. Wir legen die erhaltenen Zahlangaben — ohne aber diese selbst vorzustellen — **an die vorgestellte sachliche Wirklichkeit an, wählen** auf Grund dieser Prüfung die rechnerischen Operationen aus, und versuchen schätzend das Ergebnis zu überblicken.

6. Wir **führen die Operationen** einzeln aus und prüfen nach — entweder durch Ausführung der entgegengesetzten Operation oder durch überblickendes Schätzen — daß kein Rechenfehler unterlaufen ist.

7. Wir wiederholen die Vorgänge bei 5 und 6, so oft es nötig ist, orientieren uns dabei jedesmal an 1 und 2, an Zielvorstellung und Rechnungsplan, verbinden jedesmal Vorgang wie Ergebnis im Bewußtsein mit allen vorhergegangenen entsprechenden Vorgängen, und werten seine Bedeutung für das zu erreichende Ziel.

8. Wir dehnen die Nachprüfung auf die Gesamtheit der Rechnung aus, vergleichen das Ergebnis mit der Zielvorstellung und suchen uns der Bedingungen bewußt zu werden, unter denen die durchgeführte Rechnung Gültigkeit hat.

Diese Analyse zeigt, daß beim wirklichen Rechnen die Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen wohl das selbstverständliche und in keiner Weise zu ersetzende Material bilden, daß aber die an Wert weitaus überwiegende Hauptsache etwas anderes ist. Dieses andere besteht — um es zusammenfassend auszudrücken — in der unter der Wirkung der Zielvorstellung vor sich gehenden Auswahl und Verbindung des assoziativen Materials.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß hier der Einwand auftaucht, man könne doch nicht bei jeder allereinfachsten Rechenaufgabe diese 8 langen inhaltreichen Abschnitte geistiger Tätigkeit durchlaufen, womit angedeutet sein würde, daß man der obigen Analyse nur für das zugrunde liegende komplizierte Beispiel Anerkennung zollen wolle. Es ist daher nötig, sie noch an einem einfacheren Beispiele nachzuprüfen.

Eine Hausfrau will ihr Kind zum Fleischer schicken und fragt sich: Wieviel kostet $^3/_4$ Pfund Rindfleisch?

Punkt 1 der Analyse ist ungekürzt vorhanden. Punkt 2 erledigt sich, weil es sich hier nur um eine einzige Rechenfrage handelt. Punkt 3 ist vollständig da; die Frau sagt sich vielleicht: Das Pfund wird 90 ₰ kosten. Punkt 4 ist im Sinne der Bewußtheit vorhanden, daß die in 3 erwähnte Zahlangabe völlig ausreichend ist zur Lösung des gestellten Problems. Punkt 5 erfährt im Geiste dieser Rechnerin eine besonders ausführliche Behandlung, indem sie — in diesem Falle gleich in Verbindung mit Punkt 6 — $^1/_2$ Pfund und dann $^1/_4$ Pfund zu rechnen unternimmt und zugleich ausrechnet: 45 und 23 ₰. Nach Punkt 7 zählt sie beides zusammen: 68 ₰ und erlebt — Punkt 8 — ein Wahrheitsgefühl der Richtigkeit ihrer Rechnung, oder — wenn sie etwa 78 ₰ als Ergebnis gewonnen haben sollte — ein Gefühl des Mißtrauens: das kann doch nicht sein! Und die die umgekehrte Operation verwendende Nachprüfung fügt hinzu: Dann müßte ja das Pfund über 1 ℳ kosten. Und die Rechnung wird an der entsprechenden Stelle — Punkt 5 — nochmals aufgenommen.

Man sieht, die Analyse kann nicht wesentlich gekürzt werden.

Nur gehen die Einzelvorgänge, je nachdem sie mechanisiert sind, außerordentlich rasch vonstatten. Wenn man auf diese Schnelligkeit achtet, wird man eher sagen dürfen, daß unsere Analyse eigentlich nur die Hauptpunkte heraushebt, und wird imstande sein, noch viel eingehendere Analysen anzustellen.

Und nun die Analogie!

Eine Nähmaschine oder ein Fahrrad besteht aus mehreren hundert einzelner Bestandteile. Nun genügt nicht der Besitz dieser Bestandteile, um aus ihnen etwa ein Fahrrad herzustellen, auch nicht einmal die Einsicht in die Elementarverbindungen (z. B. daß Schraube und Mutter zusammengehören) und ihre Beziehungen. Sondern der Geist ist dazu nötig, der die Wirkungsweise der Verbindungen und ihren wechselseitigen Einfluß aufeinander erkennt und vorstellt. Die hochgesteigerte Tastempfindlichkeit der Hände kommt hier außerdem dazu. Man wird einwenden können: Solchen Zusammenbau kann auch ein weniger intelligenter Kopf lernen. Darauf ist zu erwidern: Aber ein Mindestmaß von Intelligenz muß doch vorhanden sein. Die Maschine wird niemals den Monteur ersetzen können, so wie Automatismus nie die geistige Beobachtung. Außerdem wird je nach dem Grade der verfügbaren und aufgewendeten Intelligenz die Güte des Werkes geringer oder größer sein. Überdies: der Zusammenbau einer Maschine, wie wir ihn im Auge hätten, ist ein Fall, der sich meist mit nur geringen Abänderungen wiederholt; das Rechnen des Lebens stellt uns vor immer neue Fälle. Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen sind die Bestandteile — manches Kind beherrscht sie vollkommen, nicht bloß dem Wort nach, und doch kommt es vor, daß es nicht rechnen kann.

Auch die andere Analogie ist lehrreich. Das Rechnen ist in vielen Beziehungen der Sprache ähnlich[1]). Das Material sind dort die Zahlbegriffe, hier die Wortbegriffe im allgemeinen. Den Zahlbeziehungen entsprechen die Wortbeziehungen, die durch Biegung und Abwandlung, durch Verhältnis- und Bindewörter ausgedrückt werden. Ist nun derjenige, der die Wörter des Umgangs mit ihren Beziehungen beherrscht, damit schon befähigt, einen sinnvollen Vortrag zu halten? Oder ist etwa ein Gedicht nichts weiter als eine Summation von Wörtern mit ihren gegenseitigen Elementarbeziehungen? Es ist in der Tat nicht zuviel behauptet: Wie sich ein Gedicht zu einem Wörterbuch verhält, so verhält sich die rechnerische Anwendung zu den vorher zu gewinnenden rechnerischen Operationssätzen. Was unsere Wörter und Sätze zu Gedanken und Abhandlungen macht, was unsere Zahlbegriffe und Rechensätze zu Problemlösungen einfachster wie komplizierter Art gestaltet, ist

[1]) Abgesehen davon, daß die Sprache nur ein Ausdruck des Denkens überhaupt, und daher Rechnen sowohl von Sprache als von Denken ein Teilgebiet ist.

hier wie da dasselbe: der planmäßige Zusammenhang unter einer leitenden Idee.

Aus jener Analyse und aus diesen Analogien ergibt sich nun als das Wesen der rechnerischen „Anwendung" dies: Die Fähigkeit, unter der Herrschaft einer Zielvorstellung aus den assoziativ zur Verfügung stehenden Zahlbegriffen und Operationen diejenigen auszuwählen, in Verbindung zu bringen und zu betätigen, durch die das gesteckte Ziel richtig, sicher, schnell und elegant[1] erreicht wird. Im Lichte der Psychologie betrachtet, stellt sich aber jeder dieser Vorgänge dar als ein Willensvorgang von sehr zusammengesetzter Art, womit gleichzeitig ein Hinweis gegeben ist auf die Entwicklung dieser Fähigkeit. Dieser Entwicklung wollen wir uns nun zuwenden.

Rückblickend aber fassen wir zusammen, daß die geistige Leistung, welche wir mit Rechnen bezeichnen und die der Rechenunterricht auszubilden die Aufgabe hat, aus drei Stücken besteht: aus dem Erwerb der Zahlbegriffe, dem Erwerb der Zahlbeziehungen und der Entwicklung der Fähigkeit, beides in zielbewußter Weise anzuwenden.

§ 15. Die Entwicklung der rechnerischen Anwendungsfähigkeit.

Wenn die Entwicklung einer gewissen Art von Willensvorgängen in kurzen Strichen dargelegt werden soll, so läßt sich das tun, indem man einerseits die Entwicklung ihrer intellektuellen und emotionalen Komponenten zeigt, andrerseits ausführt, zu welchem Endziel die innige Verknüpfung beider in immer wiederholtem Versuch führt.

Zwei intellektuelle Komponenten sind es, welche sich an der Ausbildung der Fähigkeit rechnerischer Anwendung beteiligen: Zunächst Kenntnis und Verständnis der wirklichen oder angenommenen Maßverhältnisse der in Betracht kommenden Dinge und Erscheinungen — und sodann: Herrschaft über die Zahlbegriffe und Zahlbeziehungen, Vertrautheit mit ihrem Wesen und ihren Wirkungen. Jenes ist mehr konkretes, dieses mehr abstraktes, jenes mehr materiales, dieses mehr formales Erfordernis.

Die Notwendigkeit der Beherrschung von Zahl und Operation braucht hier nicht nochmals begründet zu werden. Aber auch das geforderte Maßverständnis ist von grundlegender Bedeutung insofern, als von ihm die mehr oder minder große Klarheit und Richtigkeit der Zahlvorstellung, des Sachverhalts und der Zielvorstellung abhängt. Beide Komponenten erscheinen darum in gleichem Maße notwendig.

[1] D. h. mit geringstem Energieverbrauch bei gefälliger Form.

Aber man braucht nur die Wirklichkeit anzusehen, um zu finden, daß der Grad ihres Vorhandenseins manchmal bedenklich gering ist. Und zwar gilt dies Urteil nicht nur von der abstrakteren Komponente, von dem Vertrautsein mit Wesen und Wirkung von Zahl und Operation — z. B. der Multiplikation im Gebiete der Dezimalbrüche — es gilt in höherem Maße noch von der konkreten. Wie viele von den Gebildeten sind imstande — selbst mit Gestattung 10- oder gar 20prozentiger Abweichung — anzugeben, wie lang 1 m oder 1 km ist, oder ein Ding der Umgebung zu bezeichnen, das etwa 1 kg wiegt. Oder umgekehrt zu sagen, wie breit ein Blatt Papier ist, das man in der Hand hält, eine Straße, auf die man hinabblickt, ein Fluß, den man überschreitet. Oder wie hoch ein Zimmer, ein Baum, ein Turm ist, wie hoch ein Flieger schwebt. Oder wieviel ein Eisenbahnwagen laden kann (obwohl es an jedem steht!), wie schwer ein Stück Kuchen oder ein Stück Wurst ist, das vor uns auf dem Teller liegt, oder ein Buch, das wir in der Hand haben. Es ist höchst interessant, mit sich selbst unvoreingenommene Prüfungen in dieser Richtung zu veranstalten[1]. Handwerker sind uns in solchen Schätzungen meist überlegen, in solchen, auf die sie ihr Beruf hinweist, ganz unvergleichlich. Kinder dagegen zeigen oft eine geradezu rührende Unkenntnis, und zwar, obwohl sie schon jahrelang mit Meter und Zentimeter, mit Liter und Kilogramm gerechnet haben. Dabei wissen sie sich sogar zu erinnern, daß sie es in der Schule „gehabt haben". Die Militärbehörden haben anscheinend mit am ersten die Notwendigkeit des Verständnisses für die Maßverhältnisse des Lebens erkannt und an ihrem Teile zur Erziehung unseres Volkes tatkräftig beigetragen. Neuerdings verspricht die Pfadfinderbewegung auf diesem Gebiete Gutes zu leisten.

Wenn man sich diese tatsächlichen Zustände vergegenwärtigt, so liegt nicht nur die Frage nahe, welches denn die Ursachen dieser Entwicklung sein mögen, sondern auch die Antwort. Sie kann nicht anders lauten als so: Dies Verständnis, dies Können ist keine angeborene Fähigkeit, sondern eine gar nicht einmal so sehr schwierige Erwerbung, die zustande kommt durch stete Anregung und Gewöhnung zu messender Betrachtung der Dinge und Erscheinungen,

[1] Bei Gewichtsschätzungen müßte z. B. eine rasche oberflächliche Berechnung mit Hilfe des spezifischen Gewichts unterbleiben. Das würde eine intelligente Berechnung sein, nicht aber ein Kennen der Maßverhältnisse erweisen. Auch Erinnerungsschätzungen sind interessant, wenngleich auch hier die Autosuggestion, daß man falsch schätzen könne, stark berichtigend wirkt. Vor kurzem legten wir in diesem Zusammenhange Primanern die Frage vor, wie hoch eine Kuh am Widerrist sei. Dabei sollten sie möglichst an ein bestimmtes Erlebnis denken, bei dem sie eine Kuh in unmittelbarer Nähe gesehen hätten. Die Angaben, die nicht in Zentimetern, sondern mit der ruhig gehaltenen Hand gemacht wurden, waren sämtlich zu hoch, zum Teil um 50%.

die allerdings schon in der Jugend einsetzen muß, aber selbst noch in höheren Jahren Erfolge verheißt.

Diese Anregung ist an uns versäumt worden, vielleicht auch noch von uns[1]).

Die Entwicklungslinie der konkreten Komponente beginnt schon vor der Schulzeit und setzt sich fort bis ins hohe Alter; die der abstrakteren setzt erst nach dem Beginn der Schulzeit ein und endigt gewöhnlich mit ihr.

Auch an emotionalen Komponenten der Fähigkeit zu rechnerischer Anwendung kommen zwei in Betracht: einmal müssen die höheren intellektuellen Gefühle einen gewissen Grad der Ausbildung erreicht haben, und sodann muß auch die Entwicklung der Aufmerksamkeit, die Zielvorstellung festzuhalten und die Wirkungen der verschiedenen Beziehungen mit ihr zu vergleichen hat, schon ziemlich gefördert sein. Jene Seite erscheint mehr passiv, diese mehr aktiv.

Es ist dabei darauf hinzuweisen, daß die pädagogische Welt — und erst recht die nichtpädagogische — bisher in einer nicht geringen Täuschung gelebt hat in ihren Ansichten über die Gefühlsentwicklung in der Jugend. Wir haben den Kindern allgemein die Gefühle angedichtet, die wir selbst erleben; und wir haben uns bemüht, unsere Erziehungsmaßnahmen darnach einzurichten. Dem gegenüber hat die neuere psychologische Forschung weitgehende und teilweise ganz unerwartete Unterschiede der verschiedenen Lebensalter festgestellt[2]). Und zwar gilt dies nicht nur von den

[1]) Daß unser bisheriger Unterricht in diesem Punkte viel versäumt hat, ist gar nicht zu bezweifeln. Ist nicht der gesamte Sachunterricht, den wir genießen vom 6. bis zum 20. Jahre und zum Teil darüber hinaus, fast rein qualitativ? Wie ein Ding ist, und vor allem, wohin es gehört, und allenfalls, wie dies und jenes zusammenhängt, darin erschöpft er sich fast überall. Wird je die Größe eines Dinges so ins Auge gefaßt, daß sie neben den Qualitäten eine ebenbürtige Stellung einnähme? Man wird hinweisen auf die Quadratkilometer und Einwohnerzahlen in Geographie. Aber sind nicht gerade dies Zahlen, welche fast nur verbal vorzustellen sind? Und dabei soll immer noch gern anerkannt werden, daß dies Gebiet noch am ehesten den Versuch macht, für Größen uns zu interessieren. Wenn man sich aber z. B. Physikbücher ansieht, so kann man ganz genau lernen, wie ein Flaschenzug wirkt, selbst ein Differentialflaschenzug, oder eine hydraulische Presse oder eine Dynamomaschine. Auch wie ein solches Ding aussieht oder aussehen könnte, ist meist durch Abbildungen erläutert. Wo aber findet man, für welche Lasten der gewöhnliche oder der Differentialflaschenzug gebraucht wird; welches die Ausmaße und die Leistungsfähigkeit einer kleinen hydraulischen Presse in einer Metalldrückerei und einer großen Kruppschen sind; wie groß in Wirklichkeit eine Dynamomaschine ist, und was diese Größe leistet z. B. in Lampen oder in einer sonstigen anschaulichen oder exakten Angabe? Es ist in der Tat nicht einzusehen, warum im Unterricht die Quantitätsbetrachtung so stark zurückgestellt wird hinter Qualität und Kausalität, obwohl sie im Leben — der Krieg mit seiner Ernährungsfrage zeigt dies schlagend — wenigstens eine ähnlich große Bedeutung hat.

[2]) Zwischen dem Gefühlsleben z. B. eines älteren geistlichen Herrn oder eines älteren Künstlers und dem der Jugend besteht in den meisten Fällen ein

übrigen sogenannten höheren Gefühlen, den ethischen, religiösen und ästhetischen, sondern auch von den intellektuellen, dem Wahrheitsgefühl, dem Tatsachengefühl, dem Gefühl der Übereinstimmung, den intellektuellen Erfolgsgefühlen usw.

Daß die Aufmerksamkeit erst nach und nach aus der mehr passiven zu einer mehr aktiven sich entwickelt, ist eine psychologische Tatsache, die auch weiteren Kreisen bekannt ist.

Eine nennenswerte Gesamtwirkung dieser vier Teilkräfte kann freilich erst dann eintreten, wenn jede einzelne ein gewisses Maß der Ausbildung erlangt hat. Das ist nur in seltenen Ausnahmen vor dem 10. bis 12. Jahre der Fall, sehr oft noch später. Aber einer Vorbereitung bedürfen diese Kräfte schon vor dieser Zeit. Wie dies zweckmäßig zu geschehen hat, davon wird in späteren Abschnitten die Rede sein. Nur ein allgemeiner Hinweis sei hier angefügt. Das Wachstum der einzelnen Kräfte wie erst recht ihrer Verbindung wird wesentlich gefördert durch zweierlei Anregung, eine mehr äußere und eine mehr innere. Jene besteht im Beispiel; sie veranlaßt die Nachahmung, die in Ziel und Mitteln immer bewußter sich gestalten soll. Diese besteht in der Gewährung der Gelegenheit zu wirklich eigenem Tun und Versuchen. Während nun in den jüngeren Jahren des Kindes noch das Beispiel die größere Wirkung hat, geht dieser Erfolg langsam über auf die Gelegenheit zu wirklichem Handeln, so daß in späteren Jahren diese das bedeutungsvollere Erziehungsmittel darstellt — auch zu mathemathischer Bildung. —

Zu welcher psychischen Konstitution eine derartige Entwicklung führt, sei mit einigen wenigen Strichen angedeutet. Ein so mathematisch Gebildeter wünscht in Geographie z. B. Einwohnerzahlen und Berghöhen zu wissen, nicht um sie mechanisch einzuprägen, sondern weil ihm dadurch das Bild, das seiner Vorstellung vorschwebt — ein Stadtbild aus der Vogelschau etwa — klarer wird. Er braucht Geschichtszahlen und läuft an ihnen in Gedanken entlang, den Ereignissen gewissermaßen ein Gestänge gebend, das ihm die Entfernung und zugleich die seitliche Verbindung der Einzelheiten zeigt. In den Naturwissenschaften wünscht er Mittelwerte und Grenz-

diametraler Gegensatz, den die Mehrzahl von uns bisher nicht für möglich gehalten hätte. Wir müssen in dieser Beziehung tatsächlich gänzlich umdenken lernen. Auch jene älteren Herren können sich dieses Gegensatzes bewußt werden, wenn sie imstande sind, sich ohne Irrtum die Frage zu beantworten: Was habe ich in meiner Jugend gern gehabt, was hat mich — nicht als außerordentliches Ereignis — sondern im gewöhnlichen Leben des Alltags am meisten gefreut? Wenn wir dann noch hinzunehmen, daß durch den Wandel der Zeiten — die heutige Jugend im Vergleich zu unserer — nicht etwa eine größere Frühreife heute zu finden ist, daß vielmehr der historisch belegte Entwicklungsgang umgekehrt verläuft, so können wir einen gewissen Eindruck von dieser Gefühlsdifferenz gewinnen.

werte kennen zu lernen, für technische Tatsachen verlangt er zahlenmäßige Angaben über Ausdehnung und Wirkung. Er beruhigt sich nicht mit volkstümlicher Kausalität, sondern ist gewöhnt, den Dingen zahlenmäßig auf den Grund zu gehen. Spruchstellen, Liedernummern und Seitenzahlen haften in seinem Gedächtnis, weil er darin eine Unterstützung seiner Kenntnisse findet. Als Schüler nimmt er sich vor, eine aufgegebene Menge von Vokabeln oder von anderem Lernstoff in bestimmten Teilen und in entsprechenden Zeiten zu bewältigen. Er legt überhaupt Wert auf Zeiteinteilung und Ausnutzung. In der Kunst flieht er das Extreme, er betont dagegen die Harmonie, er hat ein hochentwickeltes rhythmisches Gefühl. Er ist praktischer Tätigkeit stark zugetan und interessiert sich für den Preis von allerlei Gütern. Er zeigt einen starken „Wirklichkeitssinn" und ist sehr feinfühlig in bezug auf Recht und Billigkeit[1]). Es ist ein eigenartiges inneres Gerichtetsein, das alle Erscheinungen des Lebens mit ansieht unter dem Gesichtspunkt des **Maßes** — keineswegs ausschließlich, das wäre eine nicht wünschenswerte einseitige Entwicklung[2]).

Diesen Ausführungen gegenüber wird sich nun zweifellos der Einwand erheben: Das sind doch alles Merkmale mathematischer **Beanlagung**, weniger mathematischer **Bildung**. Dies müßte ohne weiteres zugegeben werden, wenn wir für Mathematik ein besonderes Organ hätten, wie es der Musiker im Ohre, der Maler im Auge sein eigen nennt. Da dies aber nicht der Fall ist, so sind wir genötigt, den Begriff der mathematischen Beanlagung zu analysieren. Da ergibt sich folgendes: Gehen wir die oben besprochenen Komponenten mathematischer Anwendungsfähigkeit durch, in deren Verbindung mathematische Bildung wie mathematische Anlagen am deutlichsten in die Erscheinung treten, so fällt uns allerdings auf, daß hier in gewissem Maße bevorzugt sein könne der visuelle und der motorische Auffassungstypus, die ja beide das räumliche Vorstellen mit besonderem Erfolg anwenden. Denn obwohl die diskrete Zeiterscheinung beinahe als Voraussetzung der Zahl und damit der Mathematik gelten kann, so ist doch Fortschritt wie Darstellung der Mathematik viel mehr räumlich orientiert.

Damit würde allerdings erklärt sein, daß der **rein akustische Typus**, wie er uns in manchen Musikern, Sprachkünstlern, Dichtern, vielleicht noch Sprachgelehrten entgegentritt, mathematisch weniger begabt erscheint. Dem gegenüber ist jedoch darauf hinzu-

[1]) Im Sinne der Herbartschen Ideen.

[2]) Eine solche einseitige und grelle Entwicklung scheint in gewissen Kreisen der englischen und amerikanischen Geschäftswelt tatsächlich eingetreten zu sein. Davor wird ein gnädiges Geschick unser Volk hoffentlich bewahren, dafür in ihm die guten Seiten dieses Gerichtetseins, neben den volkswirtschaftlichen insonderheit die intellektuellen, die ethischen und ästhetischen zur Blüte gelangen lassen.

weisen, daß der reine akustische Typus äußerst selten ist und daß die große Mehrzahl der Menschen dem visuellen und dem gemischten Typen angehört, dem visuell-motorischen und dem akustisch-motorischen[1]).

Außerdem wäre noch möglich, in etwa vorhandener ausgeprägter fluktuierender Aufmerksamkeit (die in Blutarmut und ähnlichen Erscheinungen ihren Grund haben kann) einen Mangel an mathematischer Begabung zu erkennen. Sie kommt gern zusammen mit passiver Phantasietätigkeit, die in freien Kombinationen sich gefällt, scharf festgehaltenen Zielvorstellungen aber aus dem Wege geht.

Die Frage nach der mathematischen Beanlagung dürfte sich also zunächst nur in der Negation ausdrücken lassen, daß der rein akustische Typus und die fluktuierende Aufmerksamkeit weniger mathematisch begabt erscheint.

Viel mehr Gewicht als der körperlichen Anlage dürfte bei der Entwicklung der mathematischen Bildung der Wirkung von Umgang und Erziehung beigemessen werden. Es ist dies schon gelegentlich der Darlegungen über die Altersfolge der Entwicklung der Zahlbegriffe und Operationsbegriffe berührt worden. Das Mädchen der höheren Kreise, dessen Geschlechtscharakter schon an sich zu größerer Rezeptivität neigt, lebt oft noch mit 10 und mehr Jahren ein Märchenleben, lebt in Spiel und Schmuck und Erfüllung aller Wünsche, ihm tritt weder die Wirklichkeit des Lebens noch das Maß der Dinge und Erscheinungen mit zwingender Gefühlsbetontheit gegenüber. Es lernt in der Schule fleißig — mehr passiv — seine Operationssätzchen, und versagt, wenn es sich um mathematische Anwendung, d. h. hier mathematische Bildung, handelt. Wer nicht alle die verschiedenen Einflüsse sieht, in ihrer Wirkung kennt und nachprüft, der spricht dann gern von einer geringeren mathematischen Befähigung des weiblichen Geschlechts, wo er doch lieber von einer anders gearteten Erziehung sprechen sollte.

Es kommt ja hier noch ein anderes hinzu. Bei unverheirateten oder kinderlosen Frauen scheint die Zeit lange nicht den Wert zu haben wie bei Männern in gleicher Lage. Handarbeiten von großem Fleiß, großer Geduld und in großer Menge sind des oft Zeugnis, von anderen Beweisen abgesehen. Weiter wird allgemein der Gedanke der „Versorgung" des Mädchens als selbstverständlich angesehen. Es sucht diese rein persönliche Versorgung entweder in der Ehe, oder in einem Berufe, dessen Ertrag für die Erhaltung eben nur der eigenen Person bestimmt ist, oder es „wird versorgt". Dieser ge-

[1]) Gerade die hervorragenderen unter den vorhin genannten Persönlichkeiten sind infolge ihres hochentwickelten rhythmischen Gefühls zu dem akustisch-motorischen Typus zu rechnen.

samte soziale Zustand bringt es mit sich, daß bei einem großen, besonders dem jüngeren Teil unseres weiblichen Geschlechts der Lebenstrieb, durch eigene Arbeit sich und die Seinen vorwärts zu bringen, nicht in der starken Ausprägung vorhanden ist als beim gleichaltrigen Mann. Für eine geringere mathematische Interessiertheit des weiblichen Geschlechts lassen sich also so viel Einflüsse der sozialen Lage, des Umgangs und der Erziehung nachweisen, daß für die Behauptung einer geringeren Befähigung der Nachweis noch nicht als erbracht anzusehen ist.

Man braucht sich ja auch nur Gegenbilder vorzustellen, um den außerordentlichen Einfluß der sozialen Lage und der Erziehung zu erkennen. Der Knabe aus ärmeren Verhältnissen, der früh seine Geschwister zu versorgen hat, während der Vater seiner Arbeit nachgeht und die Mutter Zeitungen trägt, der da spannt, wie er sich einen Fünfer verdienen oder den Eltern etwas erhalten kann, der vielleicht gar schon regelmäßigen Erwerbspflichten neben seinen Schularbeiten nachzugehen hat, der würde selbst bei akustischer Anlage ein reges mathematisches Interesse bekunden. In demselben Maße aber kann es zu finden sein bei dem Sohne des wohlhabenden Kaufmanns, wenn er zu rechter Zeit dem Vater im Geschäft „helfen darf".

Neben diese gewaltigen Einflüsse der häuslichen Umgebung und Erziehung auf die Entfaltung mathematischer Bildung stellt sich nun als gleich bedeutsamer Faktor die Wirkung des Schulunterrichts. Was ist dazu zu sagen? Durch unser ganzes Buch zieht eine leise Anklage dieses Unterrichts, nicht der Personen — das ist schon mehrfach betont worden —, sondern der Verhältnisse, die den nötigen Fortschritt verhindert haben. Wir sind der Überzeugung, daß wir 3 mal soviel mathematisch „gut Beanlagte" finden würden, wenn unsere Schulerziehung, selbstverständlich voran der Rechenunterricht, ein gut Teil psychologischer und planvoller (d. h. zielbewußter, nicht etwa lehrplanvoller) wären. Wie diese Überzeugung zustande gekommen ist, das bitten wir dem zweiten Teil dieses Buches zu entnehmen.

Zur Frage der Anlage, der häuslichen und Schulerziehung noch eine Analogie! Ganze Schulgattungen bauen sich auf dem Grundsatze der vorwiegenden Sprachbildung auf. Obwohl es nun keinem Zweifel unterliegt, daß der ausgesprochen akustische Typus verhältnismäßig selten ist, so liefern doch diese Schulen übergenug Alt- und Neuphilologen, d. h. solche, die ihre Lebensarbeit diesem Gebiete zu widmen gedenken. Auch hier zeigt sich, daß Umgang und Erziehung, besonders aber Gewöhnung und Übung den Mangel einer ausgesprochenen Begabung ersetzen und zu normalen, ja sogar übernormalen Zielen führen können.

Des Aufbaus II. Teil:

§ 16. Ein neues Ziel.

Die Praxis des heutigen Rechenunterrichts läßt sich vor zwei Aufgaben gestellt zu sehen: 1. möglichste Rechenfertigkeit zu erzeugen, 2. für alle wichtigeren Rechenfälle des Lebens Lösungsverfahren zu entwickeln und einzuüben. Zwar ist dies den amtlichen Lehrplänen ist dies dem Wortlaut nach nicht zu entnehmen. Sie befleißigen sich einer höchst anerkennenswerten Vorsicht, wenn sie fast übereinstimmend das Ziel des Rechenunterrichts so aussprechen: Befähigung zu selbständiger, sicherer und schneller Lösung der Aufgaben des gewöhnlichen Lebens.

Aber die Methodiker, welche das Bedürfnis haben, die Zweckbestimmungen weiter auszuführen und zu begründen, lassen jene zweiteilige Aufgabe deutlich erkennen.

Maertens und Schreiber[1]) nennen als materialen Zweck: eine für das Rechnen des praktischen Lebens ausreichende Sicherheit im Gebrauche der Zahlen mitzugeben — was sie weiter unten ausdrücken als Rechenfertigkeit —, und als formalen Zweck: durch Förderung der Denktätigkeit die geistige Kraft des Kindes emporzubilden — dies geschieht durch verständiges, auf Veranschaulichung und Entwicklung des Verfahrens beruhendes Denkrechnen.

In ähnlicher Weise erläutert den Zweck des Rechenunterrichts auch Rude[2]).

Schumann und Voigt[3]) fügen dem materialen und formalen noch das sittliche Ziel hinzu; ebenso Heilmann[4]), während Regener[5]) und Hohmann[6]) eine sittliche Aufgabe des Rechenunterrichts verneinen.

Viele erwähnen das Wort Tillichs: „Der Schüler soll denkend rechnen und rechnend denken lernen, das ist das eine; er soll neben der Einsicht auch diejenige Fertigkeit gewinnen, welche das Leben verlangt, das ist das andere."

Auch Itschner[7]) zeigt in seiner Durcharbeitung des Stoffes, daß die Entwicklung und Übung des Lösungsverfahrens ihm als

[1]) Büttner, Anleitung. 23. Aufl. 1913. S. 2.
[2]) Methodik, II. Bd. 7. Aufl. 1910. S. 274.
[3]) Lehrbuch der Pädagogik, III. Teil. 11. Aufl. 1904. S. 377.
[4]) Handbuch der Pädagogik, II. Bd. 9. Aufl. 1911. S. 195.
[5]) Besondere Unterrichtslehre. 3. Aufl. 1905. S. 288.
[6]) Methodik. 2. Aufl. 1904. S. 285.
[7]) Unterrichtslehre, III. Bd. 1912. S. 37 ff.

der normale Weg und darum die Übermittlung des Lösungsverfahrens als ein dem Rechenunterricht gestecktes Ziel erscheint.

Wie nun schon in unserer kurzen Besprechung der angeführten Lehrpläne und Lehrproben angedeutet wurde, ist diese Zielstellung nicht haltbar. Zunächst wird der Begriff des materialen Ziels anders als sonst aufgefaßt, wenn man darunter Rechenfertigkeit versteht. Rechenfertigkeit ist eine Fertigkeit im Ablauf assoziativ gewordener Abstraktionen, und zwar von ziemlich komplexer Art, nämlich Bedingungs- und Vergleichsbeziehungen, wie oben gezeigt wurde. Das ist aber kein Material im üblichen Sinne der Didaktik. Hier wird der Ausdruck Material mehr bezogen auf das Wissen, auf die Kenntnis der Wirklichkeit, der Tatsachen. So wird in der 2. Formalstufe das „Material" dargeboten. Auf der 3. wird dies dargebotene Material mit dem sonst vorhandenen Material verglichen. Die auf der 4. Stufe formulierte Abstraktion schwebt gewissermaßen über dem Material, sie wird mit Hilfe des Materials gewonnen, wird aber nicht als mit dem Material identisch aufgefaßt. Ein assoziativer Ablauf solcher wirklich als Material zu bezeichnender Vorstellungsreihen läßt die Vermutung entstehen, daß sie rein äußerlich eingeprägt sein möchten, so wie wir Laut und Buchstaben rein äußerlich assoziieren und durch unablässige Wiederholung diese Assoziationen befestigen müssen. Vom „Material" aber wünschen wir, daß es verarbeitet, assimiliert, also innerlich verankert worden sei. Wir verstehen es dabei völlig, daß vom psychologischen Standpunkte aus auch mechanisierte Assoziationen als „Material" für komplexere Vorgänge, für die höheren Geistesprodukte erscheinen und angesehen werden. Wir haben uns selbst dieses Ausdrucks bedient. Hier aber handelt es sich um etwas anderes. Von der gesamten pädagogischen Theorie werden neben die Reihe der Sachfächer als Formfächer Sprache und Mathematik gestellt. Das will sagen, diese Fächer machen das Kind eigentlich nicht mit neuen Vorstellungen bekannt, sondern zeigen ihm an den ihm geläufigen Vorstellungen nur eine gewisse Seite, die wir Form, Ausdruck, Abgrenzung, Darstellung nennen könnten. Selbstverständlich kann dieser Charakter des Faches nicht zum Ausdruck kommen, ihr ganzes Bestehen ist nicht denkbar ohne Material, auch nicht ohne ihnen eigenes begriffliches Material. Das ist ebenso selbstverständlich wie, daß man im Zeichnen gerade und krumme Linien, beim Sprechen Laute und beim Schreiben Buchstaben braucht, deren Besitz erworben sein muß. Es geht aber nicht an, das, was selbstverständliche Voraussetzung ist, zur Zielaufgabe zu gestalten, wenn anders wir nicht den ganzen Charakter des Faches verwischen wollen. Wie wir den Realien im Unterricht zunächst die Aufgabe stellen, die Jugend mit den Dingen bekannt zu machen, und hoffen, daß dabei oder daneben

auch ein formaler Zweck erreicht werde — der an sich von höchstem Werte sein kann — so ist im Gebiet der Formfächer der formale an die Spitze zu rücken. Eine materiale Aufgabe im Sinne des Assoziationserwerbs ist selbstverständliche Voraussetzung, im Sinne der Realien würde über den Rahmen des Unterrichtsfaches hinausgehen.

Auch der Begriff des formalen Ziels wird in eigenartiger Weise ausgelegt, wenn man diesen Ausdruck bezieht auf die Anwendung eines oder auch vieler Schemata, wie sie die Anwendung der verschiedenen entwickelten und eingeübten Lösungsverfahren darstellt. Denn unter dem Hinarbeiten auf ein formales Ziel versteht die Pädagogik in erster Linie die Entwicklung intellektueller Fähigkeiten, insbesondere die des logischen Vergleichens und Unterscheidens und der darauf aufgebauten Urteile, Begriffe und Schlüsse. Die sinnvolle Anwendung eines Schemas hat damit wenig zu tun. Sie läuft ja beinahe auf das Entgegengesetzte hinaus, nämlich geistige Energien zu sparen und höhere Leistungen auch einer geringeren Intelligenz zu ermöglichen. Der Ausdruck formales Ziel wird weiter auch in dem Sinne aufgefaßt, daß man behauptet, die Rechenfertigkeit fördere die gesamte Einsicht des Kindes. Freilich läßt sich für diese Behauptung auch nicht der Schein eines Beweises erbringen.

Man wolle uns in diesen Ausführungen nicht falsch verstehen. Wir denken nicht daran, zu behaupten, daß im Rechenunterricht nicht ein gewisser materialer wie formaler Bildungserwerb bestehe. Sondern wir sind der Überzeugung, daß diese beiden Ausdrücke: materiales und formales Ziel — weder in ihrer Gegenüberstellung noch in ihrer üblichen Auffassung geeignet sind, Klarheit über die Ziele des Rechenunterrichts zu schaffen.

Fast noch weniger können wir uns befreunden mit der Formulierung dieser Ziele als Rechenfertigkeit und Anwendung der Lösungsverfahren. In dieser Formulierung erscheint die assoziative Fertigkeit als erste und grundlegende Aufgabe all unseres Rechenunterrichts, während doch eine solche „Fertigkeit" aller psychischen Entwicklung gemäß einen gewissen Höhepunkt darstellen müßte. Diese Formulierung birgt also die große Gefahr in sich, daß die wirklich erste und zugleich wichtigste Aufgabe übersehen wird: die mathematische Erfassung der Wirklichkeit. Dieser Gefahr sind eigentlich alle diejenigen nicht entronnen, die unter irgendwelcher Begründung so zeitig wie möglich vom Anschauungsmittel loskommen möchten.

Sodann erscheint in der obigen Formulierung die Anwendung der Lösungsverfahren als höchste Leistung, während doch allgemein gerade die Freiheit vom Schema als höhere geistige Lösung be-

trachtet wird. Der Rechenunterricht kann sich aber keine Ausnahme von diesem allgemeinen Satze gestatten. Nicht der ist mathematisch am besten gebildet, der sich beispielsweise die Formeln für die Berechnung der Vielecke gemerkt hat, sondern der, welcher imstande ist — wenn er sie vergessen hat — sie sich in kürzester Zeit zu entwickeln.

Mit der in diesen beiden Ausdrücken niedergelegten Zielbestimmung steht also unser Rechenunterricht tatsächlich in Gefahr, herabgewürdigt zu werden zu bloßer Abrichterei, zur Dressur, zur reinen Fertigkeit. Sein ihm eigenes Gebiet wäre dann lediglich die Technik. Aber wir wollen doch nicht Rechentechniker erziehen, die jederzeit wissen, „wie es gemacht wird", d. h. die eine Routine sich angeeignet haben, die in tausend Fällen rasch zum Ziel führt, in tausend anderen Fällen aber versagt; wir wollen die Köpfe nicht zu Rechenmaschinen entwickeln, an denen man nur die Zahlen zu drücken braucht und den richtigen Knopf dazu, um das Ergebnis zu erhalten — den **richtigen** Operationsknopf, das soll eben das Kind selbst bestimmen, das läßt sich nicht maschinell, d. h. automatisch erreichen. Wir wollen endlich auch keine Erziehung treiben in der Art der chinesischen Wissenschaft und Technik, die nach dem Grundsatze verfährt: So hat es sich bewährt — ohne nach den Gründen zu forschen, sondern wir wollen eine Bildung erziehen, die täglich sich erobern muß, die sich immer der inneren Gründe bewußt sein muß, aus denen sich die jeweilige Form der Handlung ergibt.

Selbstverständlich ist, daß eine solche Beschränkung des Rechenunterrichts auf technische Ziele weder in der Absicht der Lehrpläne noch in der der Methodiker liegt. Aber bei der großen Zahl derjenigen Lehrer, welche unter allerlei Hemmungen des Berufs leiden, ist es begreiflich, daß viele von ihnen in der Praxis des Unterrichts nicht die Kraft und den Willen, aber auch nicht die Voraussetzungen in sich finden, vorgefundene Zielangaben philosophisch und psychologisch zu durchdenken und sowohl ihres inneren Gehaltes wie der Möglichkeit irrtümlicher Auffassung sich bewußt zu werden.

Ehe wir uns nun einer neuen Formulierung des Ziels zuwenden, möge erst noch versucht werden, die Sache an **einigen Beispielen** zu klären. Dabei wollen wir uns freilich immer der in Betracht kommenden Unterschiede bewußt bleiben, die Ähnlichkeit wird dann um so deutlicher hervortreten.

Im **Sprachunterricht** handelt es sich um Sprachverständnis und Sprachfertigkeit. Würden wir wohl unsere Aufgabe erfüllen, wenn wir das Kind lehrten, bei vielleicht 60 häufiger vorkommen-

den Fällen des Lebens (Begegnung auf der Straße, Abschied nehmen, Auftrag besorgen, zu Tische setzen usw.) eine nette oder zweckmäßige Redensart zu gebrauchen? Schaden würde dies vielleicht nicht gerade anrichten — obwohl auch die gegenteilige Meinung Anhänger finden könnte — aber Sprachbildung wäre es nicht. Ein Star könnte damit ausgerüstet werden, reflektorisch sein Sprüchlein loszulassen, bei den Kindern aber wäre das eben Staren- oder Papageientum, von dem man nicht einmal erwarten könnte, daß es sich später in Sprachbildung umwandelt. Denn die verständige Anschauung und die Gefühlswerte des Erwachsenen sind nicht die des Kindes, seine seelische Struktur ist anders; und wenn es erwachsen ist, wird es die Ausdrucksform der vorigen Generation wohl verstehen können, aber zu ihrem Gebrauche nur mit gewissen leisen Änderungen geneigt sein. Sprachbildung treiben wir vielmehr, wenn wir unsere Kinder anleiten, das, was in ihnen wohnt an Vorstellungen und Gefühlen, so in Worte zu kleiden, daß der andere dasselbe vorstellt und fühlt, so daß die Rede eine getreue Spiegelung des wechselnden Inhalts der Seele ist. Dazu muß freilich der Seeleninhalt Leben und Gestalt haben, er darf nicht aus farblosen und wesenlosen Worten bestehen[1]).

Wir lehren das Lesen. Wir werden auf einer gewissen unteren Stufe uns die Übung der Lesefertigkeit besonders angelegen sein lassen und sie auch noch auf den folgenden Stufen zu erhöhen trachten. Wenn wir aber unsere Lesestunden bis zuletzt ausfüllen wollten damit, das Verfahren der Lautverknüpfung bei den verschiedenen Buchstabenverbindungen, das Verfahren der Hebung und Senkung bei den verschiedenen Interpunktionszeichen und andere hierher gehörige Verfahren einzuüben, so kämen wir nicht zu Betrachtung des Inhalts, kämen nicht zur Literatur. Die ist uns aber die Hauptsache.

Der Zeichenunterricht ging in unserer Schulzeit auch noch die Bahnen des Rechenunterrichts. Auf die assoziative Fertigkeit in der technischen Beherrschung der Elemente wurde der größte, ja der ausschließliche Wert gelegt. Quadrate wurden gezeichnet mit immer neuen Veränderungen, Kreise, die von den mit dem Zirkel hergestellten sich nicht unterschieden, und Gipse bildeten die langjährige Höchstleistung. Heute hat man erkannt, daß die Aufgaben des Zeichenunterrichts wohl ohne eine gewisse Technik, Fertigkeit nicht gelöst werden können, daß aber die Technik nicht Selbst-

[1]) Man darf nicht fürchten, daß dabei die Tradition oder der historische Zusammenhang leiden könnte. Gerade auf sprachlichem Gebiete sind wir fast vollkommen von der Tradition abhängig. Selbst wenn der Entwicklung von innen heraus der freieste Spielraum gestattet würde, so würden die Änderungen selbst im Laufe von Jahrhunderten geringfügig sein.

zweck sein dürfe, sondern Mittel zum Zwecke einerseits der zeichnerischen Erfassung des Lebens, andrerseits des zeichnerischen Ausdrucks des Innenlebens.

Es ist ja mit Lesen und Sprachunterricht auch so. Da das Lesen auch von der heutigen Unterrichtspraxis als Mittel zum Zwecke angesehen und sein Betrieb entsprechend gehandhabt wird, so sind auch die Ergebnisse in diesem Fache wesentlich erfreulicher als im Rechenunterricht. Und das gleiche gilt vom Sprachunterricht überall dort, wo er nicht als Selbstzweck betrachtet und behandelt wird, sondern als Mittel zum Zwecke der Erfassung der Außenwelt und des Ausdrucks der Innenwelt. Wo aber Sprachunterricht, Lesen und Zeichnen Selbstzweck sind, wie wir älteren es vor 30 und 40 Jahren erlebten und es selbst später noch widerwillig treiben mußten, da hatte und da hat dieser Unterricht einen sicheren Erfolg, den nämlich, dies alles den Schülern gründlich zu verleiden. Ursprüngliche Kraft ließ sich glücklicherweise damit nicht abtöten, sie entwickelte sich dann meist auf Nebenwegen.

Mit dem Rechnen ist es nicht anders. Solange Rechenfertigkeit und Einübung der verschiedenen Lösungsverfahren praktisch das Ziel des Unterrichts bleiben, können die Ergebnisse nur betrüblich sein. Daß sie nicht noch viel schlimmer sind, liegt eben daran, daß die natürlichen Fähigkeiten sich gewissermaßen neben dem Unterricht entwickeln und auswirken. Wir Lehrer sehen es daran, daß zu gewissen Zeiten bei weniger begabten Naturen anscheinend plötzliche Erleuchtungen auftreten. Meist zeigt sich der psychologischen Analyse freilich das schmerzliche Ergebnis, daß eine solche Erleuchtung von der Schule wohl veranlaßt ist, aber nur mittelbar durch Anregungen, Aufgaben und ähnliches, nicht unmittelbar durch Anzünden der Lichtquelle.

So gelangen wir auf Grund der Untersuchungen über die bisherigen Formulierungen des Zwecks, auf Grund der Unterrichtspraxis und endlich durch den Vergleich mit anderen gleichgearteten Gebieten zunächst zu der formalen Forderung:

Das Rechnen darf nicht mehr Selbstzweck bleiben, sondern soll Mittel zur Verfolgung höherer Zwecke werden.

Diese höheren Zwecke aber können keine anderen sein, als **die adäquate Erfassung der Wirklichkeit**, welche uns in Geist und Natur entgegentritt, und **die Förderung der Kultur**, die in den ethischen Zielen der eigenen Vollkommenheit und fremden Glückseligkeit — nach Kant — gipfelt.

Einige Sätze mögen dies noch erläutern. Die Erfassung der Wirklichkeit — man stelle sich den alten und den modernen Anschauungsunterricht und den Naturgeschichtsunterricht der Mittelklassen vor — haben wir bis jetzt vorgenommen in der Hauptsache

qualitativ, indem wir die Eigenschaften und die Teile der Dinge beachteten. Auf Grund dieser Betrachtung — früher geschah es oft auch ohne sie — entwickelten wir den Oberbegriff, und manchmal traten kausale Beziehungen hinzu. Die Wirklichkeit unter dem Gesichtspunkt der Größe zu erfassen, haben wir so ziemlich unterlassen oder es mindestens als unbedeutsam an letzte Stelle gerückt. Daß die Kuh 2 Hörner, 2 Ohren und 2 Augen, 1 Kopf, 1 Schwanz und 4 Beine habe, das war die ganze zahlenmäßige Erfassung dieses Naturobjektes nicht nur in Unter-, sondern auch in Mittelklassen. Die Präparationswerke sind des Zeuge. Sollte es aber statt solcher aus dem inneren Bilde oder aus dem längst vorhandenen Oberbegriff zu entnehmenden Angaben nicht besser sein, wenn selbst unsern Großstadtkindern mitgeteilt würde, wieviel Liter Milch man im Durchschnitt (und in besonderen Fällen) von einer Kuh erwarten kann, oder wieviel Schlachtgewicht ein solches Tier hat, oder wieviel es kostet, oder wieviel Futter es braucht — selbstverständlich all solche Darlegungen auf passender Stufe! — In der Geographiestunde müssen unsere Kinder unzählig oft lernen, daß man da oder dort Viehzucht treibt. Was das aber bedeutet, wenn man die Wirklichkeit erfassen und sich nicht mit bloßen Wortklängen begnügen will, das läßt sich klarlegen nur unter dem mathematischen Gesichtspunkte, wie er soeben angedeutet wurde. Und so müßte es überall sein: Kein Objekt dürfte den Kindern nahe gebracht werden, ohne daß es nicht auch zahlenmäßig erfaßt würde. Selbstverständlich nicht in dem Sinne, daß die Kinder nun noch mehr mit „Material" beschwert würden, sondern in dem anderen, daß die Zahlen die Vorstellung klären und verdeutlichen und die Bedeutung des Dinges ins rechte Licht setzen. Einen vielverheißenden Anfang in dieser Richtung hat der Geographieunterricht schon seit längerer Zeit gemacht, in der letzten Zeit ihn auch erweitert durch Betonung der graphischen Darstellung (von in Betracht kommenden Zahlgrößen). Andere Fächer folgen. Man sieht, der Gedanke hat längst Wurzel geschlagen. **Er gilt aber nicht nur für Naturgeschichte und Geographie**, sondern auch für Geschichte, Physik, Menschenkunde und Biologie — wobei wir Bürgerkunde als der Geographie und der Geschichte zugewiesen betrachten. Er gilt nicht nur für die Oberstufe, sondern in entsprechendem Maße auch für die Unterstufe; er gilt nicht nur für die Dinge des Lebens, sondern auch für seine Erscheinungen, zumal die unter dem Gesichtspunkte des Eigentums, des Rechts, der Verwaltung und der Kräftewirkung stehenden. Es genügt nicht, all dies qualitativ zu durchleuchten und zu verstehen, wir müssen auch die quantitative Betrachtung überall hinzufügen, d. h. wir müssen in allen Sachunterrichtsstunden rechnen — genau so, wie jede Stunde eine Deutschstunde sein soll. Denn Rechnen heißt eben nicht,

das Einmaleins können oder Brüche durcheinander dividieren, sondern Rechnen heißt, die Dinge und Erscheinungen des Lebens nach ihren Maßbeziehungen richtig beurteilen können. Bezogen auf den Einzelfall ergibt sich daraus der Begriff des mathematischen Problems, bezogen auf die Gesamtheit dieser Erscheinungen der Begriff der mathematischen Bildung. Denn indem wir in unserm Sachunterricht außer den qualitativen auch quantitative, d. h. mathematische Probleme sehen und diese Probleme durch die stetig wiederkehrende mathematische Erfassung der Dinge und Erscheinungen lösen lernen, führen wir zu der wahren mathematischen Bildung, die — wie schon gezeigt wurde — sogar höhere ethische und ästhetische Werte enthält. Die Technik, die Rechenfertigkeit ergibt sich dabei als Nebengewinn ganz von selbst. Man könnte ihren Erwerb beinahe abhängig sein lassen von dem auftretenden Bedürfnis.

So bleibt nichts übrig, als in unsere Zielbestimmung den Begriff der mathematischen Bildung mit hereinzunehmen. Es mögen nur ihre Grundlagen sein, die wir vermitteln wollen, die allerersten; darüber besteht keine Illusion. Aber es soll mit allem Nachdruck ausgesprochen werden, daß unbedingt über das rein Mechanische hinausgegangen werden muß, auch in den einfachsten Verhältnissen; und zwar sowohl in bezug auf Vorbereitung und Grundlegung des Mechanischen, als auch, und erst recht, in bezug auf seine Verwendung. Sachliche Zahlauffassung ist der Sinn der einen Seite, zahlenmäßige Sachauffassung der Sinn der anderen der beiden Seiten, welche den heutigen Rechenunterricht zu ergänzen berufen sind.

Angesichts solcher Forderungen dürfte wohl der Einwand erhoben werden: **Mathematik** gehört in die höheren Lehranstalten, die Volksschule hat es lediglich mit dem **Rechnen** zu tun. Wer aber so spricht, zeigt nur, daß entweder sein Begriff der mathematischen Bildung korrekturbedürftig oder seine Ansicht von den Aufgaben der Volksschule nicht mehr zeitgemäß ist. Er verengert meist den Begriff der Mathematik, indem er sie — wie es vielfach geschieht — beginnen läßt mit Algebra, mit einer Abstraktion höheren Grades. Das ist aber ein Irrtum. Mathematische Bildung beginnt vielmehr schon dort, wo die Größenbeziehungen des Mehr und Weniger gewonnen werden. In diesem Sinne kann man sogar sagen, es könne einer Algebra treiben, ohne dabei mathematische Bildung zu erwerben — wie wir es selbst eine Zeitlang zu unserm Leidwesen erleben mußten —, wenn nämlich die Algebra betrieben wird als Anwendung einer Anzahl einzulernender Rechenregeln. Von hier aus gesehen, konnte auch die Behauptung aufgestellt werden: „Mathematik und Rechnen sind zwei verschiedene Dinge, die freilich ge-

legentlich kombiniert auftreten können[1])." Der Besitz der Mathematik ist tatsächlich etwas Geistiges, Apperzeptives, Potenzielles, der Besitz des Rechnens etwas Mechanisches, Associatives, Materielles. Mathematik und Rechnen verhalten sich wie Fähigkeit und Fertigkeit, beinahe auch wie Denken und Sprechen, wie Dichtung und Lesen, wie Kunst und Bleistiftführung.

Daß die Schule aber sich künftig nicht wird der Aufgabe entziehen können, die Grundlagen mathematischer Bildung zu vermitteln, das braucht im Jahre des Kriegs nicht mehr begründet zu werden.

Angesichts dieses anscheinend reformatorischen Verlangens, an Stelle des bisherigen Rechnens Mathematik — oder richtiger: mathematische Bildung in den Erziehungs- und Unterrichtsplan der Volksschule aufzunehmen, ist es gewiß für viele eine Beruhigung, wenn darauf hingewiesen wird, daß dieser Gedanke durchaus nicht neu ist, ja daß er eigentlich geahnt und gefühlt wurde von jeher, daß man aber in Ehrfurcht vor der „höheren Bildung" und bei dem Mangel an ausreichenden psychologischen Kenntnissen nicht wagte, den Ausdruck mathematische Bildung in das Erziehungsziel der Volksschule einzubeziehen. Wir wollen aber den Gedanken gern darin angedeutet finden, daß die „Allgemeinen Bestimmungen" wie der Sächsische Lehrplan und viele andere von „Befähigung zu selbständiger... Lösung der Aufgaben" sprechen, sowie davon, daß das Rechnen als „Übung im klaren Denken" zu betreiben sei. Klarer ist es schon ausgesprochen im Leipziger Lehrplan: „Klares Verständnis der bei zahlenmäßiger Auffassung der Dinge und Verhältnisse sich ergebenden Rechenvorgänge, ... das Urteil zu schärfen und zur Selbständigkeit zu führen." Am weitesten geht der neue Berliner Lehrplan, wenn er als Aufgabe des Rechenunterrichts hinstellt: „Die Verhältnisse des Lebens zahlenmäßig zu erfassen." Die Methodiker, fast ohne Ausnahme, kleiden den Gedanken der mathematischen Bildung in die Worte: „Förderung der geistigen Kraft" — wobei freilich das „rechnende Denken" Tillichs oft zitiert, aber um so seltener durchdacht und ausgeführt worden ist. Unter ihnen ragt Walsemann[2]) hervor durch die Formulierung: „Numerische Auffassungs-, Anschauungs- und Denkfähigkeit."

Für Erziehungs- und Unterrichtspläne dürfte sich außer der kurzen Formel „mathematische Bildung" noch die ausführlichere eignen: Der Rechenunterricht hat die Aufgabe, die Grundlage zu vermitteln für eine mathematische Er-

[1]) Paul Ruthe, Päd. Zeitung 1914 Nr. 13.
[2]) Methodik. I. Bd. 1910. S. 31.

fassung der Dinge und Erscheinungen des Natur- und Menschenlebens.

Daß in dieser Fassung auch das Technische, das Rechnen im besonderen Sinne mit enthalten ist, braucht nicht hervorgehoben zu werden. Es ist ebenso selbstverständlich, wie daß im Sprachunterricht Sprechübungen vorgenommen werden müssen, daß das Lesen durch Übung so weit mechanisiert werden muß, daß es rein assoziativ, man möchte bald sagen: unbewußt, vor sich geht. Es ist ebenso selbstverständlich, wie daß jemand, der musikalisch tätig sein will, Fertigkeit in der Handhabung irgendeines Musikinstruments sich erworben hat; ebenso selbstverständlich, wie daß wer malen will, die Kohle-, Kreide-, Bleistift-, Feder- und Pinseltechnik beherrscht. Aber diese Fertigkeiten sind nichts als assoziative Behelfe, welche die Entwicklung der Fähigkeiten je nach ihrer Ausbildung unterstützen können und für die entwickelten Fähigkeiten ein Werkzeug der Ausübung bilden, aber niemals mit den Fähigkeiten selbst verwechselt werden dürfen[1]). Wenn demnach dem geläuterten pädagogischen Blicke der Gegenwart die Fertigkeit als ein zwar notwendiges und daher selbstverständlich zu erwerbendes Hilfsmittel erscheint, aber doch eben als Hilfsmittel, das an Bedeutung zurücksteht hinter dem eigentlichen Ziel, so ist es die Aufgabe der künftigen Zeit, die Bildung bewußt an Stelle der Technik zu setzen. Und dies nicht nur in den Zielbestimmungen der höheren Schulen, sondern auch in denen der Volksschule.

[1]) Unhaltbar ist auch die Auffassung, als könnten aus Fertigkeiten Fähigkeiten entstehen.

Des Aufbaus III. Teil:
Das Lehrverfahren.

§ 17. Vorbemerkungen.

In den folgenden Abschnitten sollen nicht die Fragen nach den Tatsachen und den Entwicklungsgesetzen mathematischer Bildung erörtert werden, diese Abschnitte sollen vielmehr praktischen Ratschlägen gewidmet sein, die dem Unterrichte unmittelbar zugute kommen können. Wenn diese Ratschläge freilich nicht in der Luft hängen sollen, so muß ihr Aufbau auf der wissenschaftlichen Grundlage der psychologischen Forschung nachgewiesen, ihr Herauswachsen aus dieser Grundlage klargestellt werden.

Die Hauptfrage, die für die gesamten folgenden Ausführungen maß- und richtunggebend sein soll, mag demnach ihren Ausdruck finden in der Form:

Welches ist das wissenschaftlich und praktisch begründete Lehrverfahren, mittels dessen wir die Entwicklung des Zöglings in der gewünschten Weise fördern?

Diese Formulierung läßt ohne weiteres den Einfluß der neuen Zielbestimmung erkennen. Nicht um ein Lehrverfahren handelt es sich, mittels dessen wir dem Schüler auf möglichst leichte, auf möglichst leidlose oder lustvolle Weise etwas beibringen, seien es Kenntnisse, seien es Fertigkeiten. Beibringen, darbieten, übermitteln sind vielmehr Begriffe der Unterrichtskunst vergangener Tage und haben für die Gegenwart geringeren Wert; denn der pädagogische Blick unserer Zeit ist nicht mehr stofflich eingestellt. Wohl soll der Schüler auch künftig Kenntnisse und Fertigkeiten gewinnen — wir hoffen sogar: noch mehr als früher — aber wir wollen sie ihm nicht beibringen, sondern er soll sie sich erwerben. Auch das Dichterwort vom Erbgut der Väter, das zu erwerben sei, ist in der Pädagogik viel mehr zitiert als durchdacht und befolgt worden. Wir wollen seine Mahnung Wirklichkeit werden lassen, indem wir das „Ererben" künftig nur dort gestatten wollen, wo die Fähigkeit des Erwerbs genügend ausgebildet ist.

Damit wechselt auch des Lehrers Aufgabe auf allen Gebieten. Statt Stoff darzubieten, wird er künftig die Fähigkeiten des Schülers zu entwickeln haben. Das ist etwas völlig anderes, besonders für die Gestaltung des Rechenunterrichts. Denn durch die anders ge-

artete Formulierung der Frage nach dem Lehrverfahren werden dem Lehrer zwei Hilfsmittel aus der Hand genommen, die den meisten bisher als unentbehrlich erschienen und als kennzeichnende Merkmale höchster Lehrkunst: Das Darbieten und das Entwickeln. Sie gibt ihm aber dafür zwei andere in die Hand, die zunächst unscheinbar, in ihrer Wirkung jedoch ungleich mächtiger sind: die Veranlassung der Gelegenheit und die Anregung zu eigner Entwicklung.

Und das Tun des Schülers ist nicht mehr auf Empfangen eingestellt, sondern auf Erarbeiten. Nicht Leitung und Rezeptivität, sondern Organisation und Aktivität ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet.

Diese grundsätzlichen Erörterungen, die sich aus der neuen Zielstellung ergeben, müssen nun noch übertragen werden auf den Zentralbegriff des gesamten mathematischen Unterrichts, auf den der Abstraktion. Wir formulieren: Welche Anforderungen an das auf Eigentätigkeit gegründete Lehrverfahren stellt die Tatsache, daß der mathematische Unterricht in seinem ganzen Wesen Abstraktion ist?

1. Abschnitt des Lehrverfahrens:

§ 18. Die Abstraktion.

Allgemein ist man der Ansicht, daß die Grundlage aller Abstraktion die Anschauung sei. Will man also die Abstraktion recht verstehen, so gilt es, zuvor diese Grundlage kennen zu lernen. Nun gehen freilich die Meinungen darüber, was unter Anschauung zu verstehen sei, auseinander. Wie wir an anderem Orte gezeigt haben[1]), kann man allein von der pädagogischen Bedeutung des Wortes drei verschiedene Auffassungen nebeneinander stellen. Diese Verschiedenheit der Auffassung hat dazu geführt, daß die neuere Psychologie sich dieses Wortes eigentlich gar nicht mehr bedient, sondern es umschreibt. Höffding tut dies in folgender Weise: „Aus solchen Einzelvorstellungen werden durch Berührungsassoziation zusammengesetzte Vorstellungen gebildet, welche den zusammengesetzten Perzeptionen entsprechen; sie betreffen Gegenstände, Personen, Verhältnisse und Begebenheiten und können Individualvorstellungen genannt werden. Die Einzelvorstellungen sind in diesen zu Totalitäten verbunden"[2]). Wenn wir nun gleichwohl diesen Ausdruck brauchen, so ist es nötig, genau festzustellen, welchen Inhalt wir ihm beigelegt wissen wollen.

[1]) Comenius und der Anschauungsunterricht. Leipzig 1911.
[2]) Höffding, Psychologie in Umrissen. 2. deutsche Ausg. Leipzig 1893.

Ein Beispiel soll das verdeutlichen. Aller zwei Jahre, in jetziger Zeit noch öfter, kommen wir in eine Klasse mit uns unbekannten Schülern. 20 bis 40 neue Gesichter treten uns entgegen. Einige Köpfe haben etwas an sich, das uns interessiert (rotes oder struppiges Haar, absonderliche Stirn- oder Nasenform, ein besonders lebhaftes Auge usw.), die kennen wir vom ersten Anblick. Andere müssen wir uns mehreremal recht genau ansehen, und einige, die „zum Verwechseln ähnlich" sind, lernen wir vielleicht erst nach Wochen sicher unterscheiden. Dazu kommen die 20 bis 40 neuen Namen; sie zu lernen und außerdem noch dem richtigen Gesicht zuzuordnen, macht manchem von uns große Schwierigkeiten. Wiederholtes Betrachten des Gesichts mit gleichzeitigem Nennen des Namens überwindet sie endlich. Haben wir nun von dem einzelnen Schüler eine Anschauung? Manche werden diese Frage zu bejahen geneigt sein, andere werden sie verneinen mit der Begründung, daß zu einer „Anschauung" noch mehr gehöre. Sie hätten eine Anschauung nur von einzelnen bisher gewinnen können. Von diesen einzelnen könnten sie jeden geradezu „malen", und sie malen ihn mit Worten und Gesten[1]. Von den übrigen hätten sie nur eine „unklare Anschauung", das sei aber eigentlich ein Widerspruch in sich selbst. Denen, die so sprechen, wollen wir uns anschließen.

An diesem Beispiel zeigt sich, daß wir noch nicht dort von einer Anschauung im pädagogischen Sinne reden, wo wir ein äußeres räumliches Bild eines Individuums gewonnen haben, sondern erst dort, wo das äußere räumliche Bild durch die Kenntnis der inneren Beziehungen vervollständigt worden ist, ja wo die Einzelheiten des äußeren Bildes zu Trägern der inneren Beziehungen geworden sind. „Kennen Sie das neue Seminar in D.?" fragt uns ein Bekannter. „Bedaure, nein, ich bin erst einmal daran vorübergegangen." Eine Anschauung eines solchen Gebäudes haben wir erst dann gewonnen, wenn wir es durchwandert haben, und zwar durchwandert mit der Gesamtheit der Erfahrungen, die wir in bezug auf diesen Gegenstand schon gesammelt haben. Bei einem Gerichtsgebäude, einer Fabrik, einem Hüttenwerk gewinnen wir (d. h. wir Pädagogen) auch von einem einmaligen Durchwandern noch keine Anschauung, sondern nur einen „Eindruck", ein oberflächliches Bild. Der jeweilige Fachmann kann sie gewinnen. Der musikalisch Beanlagte lernt eine Oper mit einmaligem Hören kennen, der Mittelbegabte besucht sie dreimal und öfter, ehe er eine Anschauung von ihr gewonnen zu haben glaubt, ehe er sie kennt. Diese Beispiele zeigen uns, daß

[1] Z. B.: Da ist einer, träumerisch, langsam, weich, von tiefem Gemüt, manchmal nicht bei der Sache, aber man kann ihm nicht böse sein, man sieht in seinen Augen das Bedauern darüber und erkennt aus seinen Mienen und Worten die gute Absicht, Versäumtes nachzuholen . . .

noch weitere Anforderungen an die Anschauung zu stellen sind. Wir können sie demnach erklären als eine Assimilationsform, die in wiederholter, planmäßiger und allseitiger Auffassung der Merkmale und Beziehungen eines Einzelwesens besteht. Was diese Darlegung von der Höffdingschen unterscheidet, sind die Forderungen: wiederholt, planmäßig, allseitig, sowie die Betonung der Beziehungen als der inneren Merkmale des Einzelwesens.

Diese einzelnen Punkte haben nicht geringe Bedeutung für die Gewinnung der Abstraktion und für die Gestaltung des Lehrverfahrens. Nur in wiederholter Auffassung kommt eine Anschauung zustande. Mancher aber glaubte bisher, er habe alle Vorbedingungen für die Entstehung einer Anschauung erfüllt, wenn er einmal eine halbe Stunde lang der Klasse das Objekt der Anschauung vorführte. Auch der Tadel jüngerer Lehrer an unwissende Kinder: „Aber das habt ihr doch gehabt!" entspringt diesem Irrtume. Bei Kindern darf im allgemeinen unter „wiederholter Auffassung" „sehr oft wiederholte Auffassung" verstanden werden[1].

Daß die Anschauung ein planmäßiges Auffassen ist, bezieht sich nicht auf den Lehrer, sondern auf den, der die Anschauung gewinnt, den Schüler. Bisher war unsere Meinung die, daß die Auffassung immer der Lehrer zu leiten habe, daß das „planmäßig" also nur von ihm gelten könne. Aber wenn einer noch so oft denselben Weg geht, so lernt er wohl diesen Weg kennen, nicht aber die Art, wie man in anderen Fällen seinen Weg sich sucht. Die Auffassung des Schülers muß planmäßig werden, das heißt, es muß die in ihm wohnende Fähigkeit der Auffassung entwickelt werden, wir müssen ihn eine Methode der Anschauung sich erarbeiten lehren. Zu dem Zwecke werden wir ihm zeigen, wie man seine Aufmerksamkeit richtet auf qualitative und quantitative Beschaffenheit, auf Teile, Reihenfolge, Bedeutung, Zweck usw.

Weiter muß die Auffassung allseitig sein, wenn sie zu Anschauungen führen soll. Das bedeutet zunächst die Auffassung mit allen Sinnen, nicht bloß des Wortes mit dem Ohr, auch nicht bloß des räumlichen Vorstellungsbildes mit dem Auge, sondern auch die Auffassung mit Geruch und Geschmack, wenn dies in Betracht

[1] Ein Kind des 3. Schuljahres fragte in der Rechenstunde, als ein Exempel des vorgeschriebenen Rechenheftes dazu Veranlassung gab: „Was heißt denn ‚vermindere'?" Das war zwar im Laufe des letzten Halbjahres schon drei- oder viermal ausführlich an Beispielen erörtert worden; viele Kinder gaben auch ihrem Erstaunen über diese Frage Ausdruck und drängten sich, den Frager zu belehren, die Assoziation zwischen Wort und Vorgang aufs neue herzustellen. Aber die Frage war uns wertvoll als Zeugnis dafür, daß Erscheinungen, welche nicht alltäglich vorkommen, erst nach öfterem Auftreten die Klarheit der Anschauung annehmen. Die Zweckmäßigkeit des Fragens wurde ausdrücklich anerkannt.

kommt, hauptsächlich aber auch die mit den so arg vernachlässigten Bewegungsempfindungen, die Auffassung mittels des Tastens, Greifens, Benutzens. Einen Menschen lernt man nicht kennen, wenn man ihn auch zwanzigmal im Konzert an demselben Platze hätte sitzen sehen; einen Füllfederhalter nicht, den man zwanzigmal im Schaufenster erblickt hat. Mit beiden muß man umgehen, d. h. mit dem Menschen sprechen, ihm Dienste leisten, von ihm Gefälligkeiten erbitten, seine Stellungnahme zu den Angelegenheiten des einzelnen wie der Gesamtheit kennen lernen usw. Und den Füllfederhalter muß man benutzen, ihn füllen, mit ihm schreiben, ihn verkehrt halten usf. Damit erwirbt man zugleich die Kenntnis der inneren Beziehungen einer Person oder eines Gegenstandes, die demnach eigentlich schon in der bisherigen Auslegung der Forderung „allseitig" enthalten sind, aber um ihres besonderen Wertes willen neben den äußeren Merkmalen besonders hervorgehoben werden sollen.

Was dieser Gedanke der allseitigen Auffassung innerhalb der Anschauung (also der Merkmale, auch der Größenmerkmale und der Beziehungen) für das Lehrverfahren bedeutet, läßt sich heute noch nicht einmal völlig übersehen, geschweige denn in wenigen Sätzen an dieser Stelle aussprechen. Einige Andeutungen müssen genügen: Von den Stoffen, die in den Lehrplänen stehen, bietet unsere heutige Schule nur in wenigen Fällen wirkliche Anschauungen (z. B. in Heimatkunde). Sehr oft bietet sie durch Worte hervorgerufene Phantasiebilder[1], oft auch einen bildlichen Ersatz, an dem einseitig nur Form und Farbe aufzufassen ist, alles andere fällt weg. Selten erscheint die Wirklichkeit des Lebens und noch seltener das Vertrautwerden mit den Dingen, was dem eigentlichen Sinn der Anschauung entspräche[2]. In diesem Sinne müßten unsere Anschauungsmittel „für die Hand der Kinder" eingerichtet sein, nicht nur für das Auge der Vorsitzenden. Das bedeutet insbesondere für das Rechnen, daß jedes Kind seinen eigenen Rechenapparat haben muß, an dem es tätig ist, mit dem es vertraut wird, an dem es „handelnd" rechnen lernt.

So umfaßt die Anschauung die allseitige Auffassung eines Gegenstandes mittels der Tätigkeit aller Sinne, einschließlich des Tastsinns, mittels des gefühlsbetonten Erlebens. Von hier aus läßt sich auch leicht die Formel gewinnen für den, der unter Anschauung nicht das Ergebnis, sondern die Funktion der wiederholten, planmäßigen und allseitigen Sinnenbetätigung in bezug auf ein Einzel-

[1] Man vergleiche den sogenannten darstellenden Unterricht.
[2] Wenn auch nicht dem Wortsinn, der geht vom Auge aus. Aber er weist doch zugleich auch in der Wahl des Stammwortes auf ein innerliches Erfassen hin.

wesen verstehen will. Er wird sagen können: Anschauung ist nötig bis zur völligen Klarstellung der Erkenntnis.

Auf diesem Grunde der Anschauung baut nun die **Abstraktion** auf[1]). Wollen wir sie zunächst nicht in objektiviertem Sinne, sondern in funktionalem verstehen, so könnten wir sagen, es ist diejenige Fähigkeit, welche in allem Sinnfälligen das Wesentliche von den zufälligen Elementen zu sondern, und dies Wesentliche zusammenzufassen weiß zum Begriff, zur Regel, zum Gesetz. Es ist das in der Hauptsache eine analytische Tätigkeit, welche sich entwickelt in dem vielfachen Ineinandergreifen der elementaren Funktionen des Beziehens und Vergleichens. Im objektivierten Sinne ist dann natürlich unter Abstraktion das Produkt dieser Tätigkeit zu verstehen, also der Begriff, das allgemeine Urteil usw.

Fassen wir nun bezüglich dieser letzteren, also **der Abstraktionen**, die Wirklichkeit ins Auge und nicht nur den idealen Hergang, so sehen wir, wie es im Leben und in der Schule **zwei Arten von Abstraktionen** gibt, die sich zurückführen lassen auf verschiedene Arten der Entstehung, die aber auch späterhin die Kennzeichen ihrer Abkunft nie verleugnen können.

Sie mögen durch zwei **Beispielreihen** belegt werden. Solche der ersten Art sind: Mais ist nahrhaft; die Säugetiere bringen lebendige Junge zur Welt; die Singvögel fressen Insekten und Körner; das Pferd ist klug; der Fuchs ist listig; Gas explodiert; das Meer ist tief; die Alpen sind ein junges Gebirge; die Italiener sind heißblütig; die Spanier sind katholisch; die Germanen waren unkultiviert; die Römer waren tapfer; die Juden waren halsstarrig; Gott straft die Übeltäter; zuletzt siegt immer die Wahrheit; alle Menschen sind sterblich; Goethes Gedichte sind tief empfunden. Solche der zweiten Art sind: Der Fisch schwimmt; Essig ist sauer; im Vorfrühling blühen eine Anzahl Bäume; bei 0° gefriert das Wasser; der Regen schwemmt das Erdreich fort; das Wasser sucht die tiefsten Stellen des Bodens auf; die alten Verkehrsstraßen führten an den Hängen der Hügel hin; es gibt mehr Arme als Reiche; glücklich, wer andere beglückt; wer lügt, kann andern nicht in die Augen sehen.

Bei den Beispielen der ersten Reihe wollen wir zunächst davon absehen, daß sich bei etlichen Zweifel erheben könnten an ihrer Allgemeingültigkeit und Richtigkeit; davon wird später noch die Rede sein. Wir wollen vielmehr vorerst den Blick richten auf ihre Entstehung im Bewußtsein der Jugendlichen. Da zeigt sich, daß sie alle **durch Überlieferung** hineingekommen sind. Alle diese all-

[1]) Vergl. dazu den früheren Abschnitt: Entwicklung der Begriffe.

gemeinen Sätze sind den Schülern gesagt worden. Man wird zwar sofort einwenden: das kann doch unmöglich bei allen in dieser groben Verallgemeinerung geschehen sein. Das sei zugegeben und sogleich darauf erwidert, daß das jugendliche Bewußtsein, selbst wenn derartige Abstraktionen nur bedingt oder eingeschränkt an es herantreten, doch nichts Eiligeres zu tun hat, als solche Sätze auf allgemeinste Formeln zu bringen. Und die große Masse des Volks unterscheidet sich in dieser Beziehung nicht im geringsten von dem jugendlichen Bewußtsein, auch sie ist der weitergehenden Abstraktion des Überlieferten durchaus geneigt. Diese Abstraktionen der Überlieferung, der Rezeption, haben nun eine außerordentlich große Bedeutung. In ihnen sind nämlich die Ergebnisse der gesamten menschlichen Kulturarbeit aufgespeichert — soweit sie nicht als Einzelerscheinungen bestehen und als Einzeltatsachen registriert, sondern soweit sie systematisiert sind. Wer daher an der menschlichen Kulturarbeit bewußt Anteil haben, die Kulturhöhe der Zeit genießen will, der muß — abgesehen von den Einzelerscheinungen — einen reichen Schatz solcher Abstraktionen zu seinem geistigen Eigentum gemacht haben. Das ist der hauptsächlichste Sinn und die Bedeutung des Stoffes im Unterricht.

Die zweite Beispielreihe dagegen zeigt Abstraktionen, die selbstverständlich auch durch Tradition, durch Überlieferung in das einzelne Bewußtsein eingehen können. Aber sie sind so gewählt, daß man ohne weiteres erkennt, daß jeder normale Schüler auf einer gewissen Stufe imstande ist, sie selbständig zu bilden, allein auf Grund eigener Erfahrung. Die Bedeutung dieser zweiten Art von Abstraktionen ist in bezug auf die Kulturübermittlung wesentlich geringer als die der ersten Art; sie haben aber vor ihr den Vorzug der größeren Bedeutung für die Entwicklung der Persönlichkeit.

Das läßt sich noch klarer erkennen bei weiterer Betrachtung der Unterschiede. Während bei den aufgenommenen Abstraktionen die Neigung betrachtet werden kann, von Bedingtheit und Beschränktheit abzusehen, tritt bei den erarbeiteten Abstraktionen leichter die entgegengesetzte Erscheinung ein, Bedingungen und Beschränkungen hinzuzufügen. Dadurch werden diese im allgemeinen richtiger, genauer als jene. Es ist dies aus der ganzen seelischen Struktur der Personen erklärlich, welche mehr nach der einen oder nach der anderen Seite hinneigen: Menschen mit ausgesprochen rezeptiver Anlage sind weniger kritisch, solche mit produktiver Anlage weit mehr. Ein Junge, der befriedigt nachsagt, daß bei 0° das Wasser gefriert, unterscheidet sich in seinem psychischen Habitus wesentlich von einem anderen, der das Thermometer zur Hand nimmt und es in das gefrierende Wasser hält. Nun ist — wie schon gesagt

— für die Übertragung der Kultur jener erstere, für den Fortschritt der Kultur dieser letztere Typus der wertvollere.

Ein weiterer Unterschied zeigt sich in der **Schwierigkeit** und im **Tempo** der **Gewinnung** der beiden Abstraktionsarten. Während die aufgenommenen Abstraktionen rasch und fast ohne jede Schwierigkeit gewonnen werden, dauert das Erwerben der erarbeiteten Abstraktionen oft recht lange und erfolgt unter Überwindung von Schwierigkeiten, die manchmal recht bedeutend werden können[1]). Die Abstraktionen eigener Erfahrung beanspruchen daher einen wesentlich größeren Energieaufwand als die aufgenommenen. Dadurch eben erlangen diese eine größere Beweglichkeit, sie werden die Kleinmünze des geistigen Verkehrs und sind in dieser Eigenschaft von nicht geringer Bedeutung. Aber sie sind auch nicht so stark verankert. Man behält sie nur so lange, bis andere mit dem Anspruch auf größeres Daseinsrecht kommen, und wirft auch diese weg, wenn anscheinend noch glaubwürdigere sich einstellen[2]).

Ihnen gegenüber führen die **erarbeiteten Abstraktionen** ein ganz anderes Dasein. Ihr langsames Reifen, ihr Emporwachsen aus einem dunklen Untergrunde der Seele läßt sie viel fester gewurzelt erscheinen. Sie sind infolgedessen dem Wechsel nicht so leicht unterworfen und bilden ein wichtiges konservatives Moment der psychischen Struktur. Die größere Beweglichkeit der einen Art, die größere Festigkeit der anderen verkörpern also jederseits eigentümliche Vorzüge.

Die Gewinnung der beiden Arten ist nun nicht nur verschieden nach Schnelligkeit und Schwierigkeit, sondern auch nach ihrer **Gefühlsbetontheit**. Die Abstraktionen, die das Kind in den obigen

[1]) Ein Mädchen, das etwa 3/4 Jahr lang schon mit dem Metermaß hantiert, alles Mögliche gemessen hat usw., geriet im Rechenbuch an die Aufgabe, 4, 6, 3, 8 m in cm zu verwandeln. Da fragte es, wieviel cm ein m habe. Die anderen Kinder hielten ihm das Bandmaß unter die Augen, und im nächsten Augenblicke war die Bestimmung da. Aber mir war die Frage doch insofern nicht bedeutungslos, als ich daraus ersah, wie selbst die Erinnerung an die Meßtätigkeit — die allerdings einige Wochen geruht hatte — auf Augenblicke dem Gedächtnis entschwinden konnte, und daß Abstraktionen dieser Art in manchem Kinderköpfchen zu ihrer Bildung und besonders auch zu ihrer Entwicklung bis zur freien Verfügbarkeit eine geraume Zeit brauchen. Außerdem war mir Frage und gegenseitige Hilfe viel lieber, als wenn das Kind bloß die Wortassoziation 1 m ist 100 cm hätte herunterschnurren können, ohne daß ich die Gewißheit gehabt hätte, daß der Sinn begriffen sei. So hatte ich sie.

[2]) Durch die Zeitungen ging ein Aufsatz, in dem von Unterseebooten gesprochen wurde. Nebenbei fiel die Bemerkung von der kaum 15 m langen Zigarre. Der gewöhnliche Mensch abstrahierte: Aha, unsere Tauchboote sind 15 m lang — und war damit zufrieden. Technisch Gebildete hegten zwar Zweifel an dieser Angabe und gaben dem auch Ausdruck. Aber die Abstraktion bestand solange, bis einer kam und behauptete: Die ich gesehen habe, waren mindestens 35 m lang. Kommt dann der nächste und sagt im Brustton der Überzeugung: Ja früher machte man sie 35 m lang, die heutigen sind mindestens 100 m — so wird das ebenso geglaubt; die alte Abstraktion wird weggeworfen und die neue an ihre Stelle gesetzt.

Beispielen von Pferd und Fuchs lernt[1]), sind ganz leise angenehm betont. Das Kind fühlt sich ein wenig ein in das Tier und fühlt sich ihm verwandt, wenn Eigenschaften behauptet werden, die es sich selbst nicht ungern zusprechen läßt. Die Abstraktionen von Gas und Meer haben einen anderen Charakter, sie sind ganz leise unlustbetont. Es ist ein schwaches Gefühl des Grauens vor einem zu fürchtenden Etwas. Dies leise Gefühl hängt sich diesen Abstraktionen an und läßt sie — wie auch die beiden vorher genannten — doch etwas fester in der Seele haften als solche fast unbetonte Abstraktionen, wie etwa die von den Säugetieren und Singvögeln. Auch wenn wir die übrigen Beispiele daraufhin prüfen, zeigt sich, daß die aufgenommenen Abstraktionen begleitet sind von meist recht schwachen Gefühlen, von Gefühlen — der Ausdruck sei erlaubt: objektiver Natur. Es sind Vorstellungsgefühle, bei denen sich das Ich wie in einem gewissen Abstande von ihnen vorkommt. Ganz anders die e r a r b e i t e t e n A b s t r a k t i o n e n. Zwar treten bei ihnen dieselben Gefühle gegebenenfalls auf, daneben aber noch wichtige Gruppen anderer, die wir bezeichnen können mit den Ausdrücken Erkenntnisgefühle[2]), Erinnerungsgefühle, Erfolgsgefühle usw. Sie bedingen eine w e s e n t l i c h g r ö ß e r e G e f ü h l s b e t o n t h e i t der erarbeiteten Abstraktionen und haben die Wirkung, sie nicht nur f e s t e r, sondern auch k l a r e r und s i c h e r e r zu gestalten.

Der wichtigste Unterschied zwischen den beiden Arten von Abstraktionen ist freilich noch nicht erörtert. Er besteht darin, daß die a u f g e n o m m e n e n A b s t r a k t i o n e n b e r e i t s f o r m u l i e r t sind. Ein anderer hat sie formuliert, wir sprechen sie nur nach. Besonders bedeutsam ist dabei, daß wir uns nicht der Grundlagen bewußt sind, nicht sein können, auf denen sie aufgebaut wurden. Wenn ein Zweifel ihnen gegenüber laut wird, so müssen wir schweigen oder können uns höchstens auf unseren Gewährsmann berufen.

Anders wiederum die e r a r b e i t e t e n A b s t r a k t i o n e n. Sie sind eigentlich weiter nichts, als ein Sprachsymbol, das eine Reihe unserer eigenen Taten, unser Sehen, Handeln, Suchen deckt, das unsere Erfahrungen umfaßt. Diese Erfahrungen stehen bei jeder

[1]) Ganz abgesehen davon, ob sie tatsächlich richtig sind oder nicht.

[2]) Manche Methodiker sind sich nicht klar über den Unterschied von Kenntnis und Erkenntnis. So kann man die Meinung lesen, daß eine gewonnene Erkenntnis später zur Kenntnis werde. Das ist ein Irrtum, der weder den Sprachgebrauch noch die psychologische Entstehung jener Vorgänge beachtet. Wir haben Kenntnis von einem Dankschreiben genommen — eine Erkenntnis ist mir aufgegangen, das sind die typischen Ausdrücke welche die Sachlage beleuchten. Diese besteht darin, daß Kenntnis die Tatsachen erfaßt, Erkenntnis aber die Zusammenhänge, oder: das Reich der Kenntnisse umfaßt das Tatsachenmaterial, das uns durch Überlieferung und Beobachtung zufließt; das Reich der Erkenntnisse umfaßt nur die erarbeiteten Abstraktionen.

Nennung des Symbols im Hintergrunde des Bewußtseins und sind bereit, aufzutauchen und sprachliche Gestaltung anzunehmen, sobald es nötig erscheint. Und das ist nicht nur dann der Fall, wenn Zweifel an unseren Abstraktionen sich vernehmen lassen, sondern auch, wenn unsere Ausdrücke vom Zuhörer mit einem anderen Sinne verbunden werden, wenn wir also uns veranlaßt sehen, uns ausführlicher auszusprechen, als wir es für nötig hielten. Für die erarbeiteten Abstraktionen haben wir dann sofort Beispiele zur Hand, mit anderen Worten: wir sind in der Lage, zu konkretisieren. Damit gelangen wir zu einem Begriffe, gegen den der Einwand erhoben werden könnte, daß er nicht unter die Überschrift „Abstraktion" gehöre, weil er augenscheinlich das Gegenteil von Abstraktion bedeutet. Aber es muß zunächst betont werden, daß auch der Begriff der Anschauung nicht zur Abstraktion gehört. Und doch mußte ausführlich auf ihn eingegangen werden, wenn man sich vor die Aufgabe gestellt sieht, die Abstraktion in allen ihren Beziehungen zu überblicken. Ebenso ist es mit dem Begriff der Konkretion. Wir müssen nämlich zeigen, daß von den beiden Arten der Abstraktion diejenige die aktive, die werbende, die lebendige ist, welche sich mit ihrem Gegenstück, der Konkretion, eng verbindet.

Um den Unterschied recht klar zu erkennen, vergleiche man daraufhin noch einmal die beiden Beispielreihen. Bei den aufgenommenen Abstraktionen können wir uns des Gefühls nicht erwehren, daß es schwer ist, aus der Masse der Beispiele, die in Betracht kommen könnten, eins auszuwählen als Vertretungsvorstellung. Diese Schwierigkeit wird noch erhöht durch das Gefühl der Tatsache, daß eigentlich keines der Beispiele, die uns durch das Bewußtsein eilen, völlig typisch ist für den ausgesprochenen Satz.

Bei den erarbeiteten Abstraktionen dagegen suchen wir nicht lange, da wählen wir nicht erst, brauchen uns nicht zu entscheiden. Da ergreift blitzschnell die Erinnerung dasjenige Erlebnis, mittels dessen uns die betreffende Erkenntnis offenbar wurde, sieht in ihm das typische Beispiel dafür und erinnert sich — man möchte sagen: genetisch — noch einer Anzahl darauf folgender Fälle, die diese Erkenntnis bestätigten. Damit ergeben sich aber für die erarbeiteten Abstraktionen völlig entgegengesetzte Daseinsbedingungen gegenüber denen der aufgenommenen. Während nämlich diese „gelernt", „gedächtnismäßig" festgehalten werden müssen, d. h. in ihrer Sprachform, können die erarbeiteten gewissermaßen vergessen werden. Ihre sprachliche Formulierung darf dem Gedächtnis entschwinden, weil die Sachvorstellung mit allen Nebenvorstellungen und mit ihrer Gefühlsbetontheit bestehen bleibt. Dadurch aber ist es möglich, auch die entschwundene Abstraktion im

Augenblicke oder wenigstens in kürzester Zeit neu zu erzeugen. Eins der besten Beispiele dafür ist die schon einmal erwähnte Formel für die Berechnung der regelmäßigen Vielecke aus dem Seitenfaktor desjenigen, das halb oder doppelt soviel Seiten hat. Näher noch liegt vielleicht manchem Leser das Beispiel des Ausziehens der Quadrat- oder Kubikwurzel. Es besteht kein Zweifel, daß das „gelernt" werden kann in dem Sinne, daß die Reihe der auszuführenden Tätigkeiten eingeprägt wird und im gegebenen Falle richtig abläuft. Es würde das eine aufgenommene Abstraktion bedeuten, und viele dürften in dieser Form über das Wurzelziehen verfügen. Eine erarbeitete Abstraktion aber würde z. B. für das Kubikwurzelziehen einen Würfel vor sich sehen von etwa 14 cm Seitenlänge. Sie blickt hindurch und sieht den Kubikdezimeterwürfel als ersten und wichtigsten Bestandteil (a^3), sieht dann drei seiner Seitenflächen bedeckt von quadratischen Platten entsprechender Dicke ($3\ a^2 b$), sieht die Lücken ausgefüllt durch drei längere Säulen ($3\ ab^2$) und fügt endlich einen kleineren Ergänzungswürfel hinzu (b^3).

Indem nun die erarbeitete Abstraktion in jedem Augenblicke neu erzeugt werden kann, unterliegt ihre sprachliche Formulierung jedesmal der Nachprüfung, der Berichtigung oder der Bestätigung. Alles das ist bei der aufgenommenen Abstraktion nicht möglich. Hätte jemand die Kubikformel vergessen, oder wäre im Zweifel, ob bei beiden Mittelprodukten der Faktor 3 stehen müßte, so könnte ihn alles gedächtnismäßige Suchen nicht von dieser Unsicherheit befreien.

Die Tatsache, daß die aufgenommene Abstraktion sich als Wortvorstellungsreihe einprägt, die erarbeitete Abstraktion aber als Sachvorstellungskomplex, dessen Betrachtung eine neue Formulierung veranlaßt, ist noch bedeutungsvoll nach einer anderen psychologischen Richtung hin. Paul Ranschburg hat experimentell nachgewiesen [1]), was schon Herbart und Lotze geahnt und behauptet hatten, daß „sich berührende Inhalte der Seele sich in ihrer selbständigen Entwicklung um so mehr stören, je homogener sie sind". Oder mit anderem Ausdruck: „Das Gleichartige strebt je nach dem Grade seiner Gleichheit zur Verschmelzung in eine Einheit."

Nun sind eine große Menge von Abstraktionen in ihrer sprachlichen Formulierung einander sehr ähnlich. Wer die beiden Sätze aus unserer ersten Beispielreihe im Geschichtsunterricht hätte „lernen" müssen: Die Germanen waren unkultiviert, die Römer waren tapfer — und nun gelegentlich einer Reproduktion infolge des

[1]) Vergl. dazu Zeitschrift für pädagogische Psychologie 1914. S. 289.

völlig gleichen Satzbaues und anderer Ähnlichkeiten in die einem solchen Intellekt ganz sinnvoll erscheinende Form gerät: Die Germanen waren tapfer, die Römer waren unkultiviert, der wird künftig die beiden Sätze kaum auseinanderzuhalten wissen. Mit Lieder- und Gedichtstrophen, noch mehr mit Sprüchen werden ja zu Zeiten ähnliche Erfahrungen gemacht. Oder, um auf mathematischem Gebiete zu bleiben: Das Kind, das wortmäßig „gelernt" hat, $7 \cdot 8 = 56$ und dann $9 \cdot 6 = 54$, das kommt mit Sicherheit dazu, zu sagen $7 \cdot 8 = 54$ und $9 \cdot 8 = 56$ und $6 \cdot 7 = 54$ usw. Jeder Lehrer der Unterstufe wird diese Erfahrung vielfach belegen können. Doch wir wissen ja, was der Methodiker von gestern sagen würde: Sie haben schlecht geübt; Sie müssen erst eins bis zu völliger Sicherheit üben, und danach das andere. An sich hat er ganz recht, nur paßt sein Einwand nicht auf diesen Fall. Denn alle Übung kann die Tatsache des sprachlichen Gleichklangs nicht aus der Welt schaffen, die sich psychologisch darin auswirkt, daß aufgenommene Abstraktionen, insbesondere solche von ähnlicher Sprachform, einander störend beeinflussen, selbst dann, wenn ihre Erwerbung längere Zeit auseinanderliegt[1]). Ihnen gegenüber verfügen erarbeitete Abstraktionen in ihrem sachlichen Vorstellungshintergrund über ein starkes Gegengewicht gegen solche unzulässigen Verschmelzungen. Was das im einzelnen für das Lehrverfahren im Rechenunterricht bedeutet, wird noch auszuführen sein. Hier handelt es sich zunächst darum, den Unterschied zwischen aufgenommenen und erarbeiteten Abstraktionen möglichst klarzulegen.

Wir fassen ihn zusammen in folgende Punkte.

Um der Zeit- und Kraftersparnis willen sind wir genötigt, den größten Teil unseres Wissens in formulierten Abstraktionen aufzunehmen, denen wir je nach Bedürfnis mehr oder weniger deutliche Phantasievorstellungen zugesellen. Diese aufgenommenen Abstraktionen sind daher für die Kulturübermittlung von höchster Bedeutung und können im Unterrichte gar nicht entbehrt werden.

Die erarbeiteten Abstraktionen dagegen dienen der Entwicklung der Persönlichkeit und gewinnen demnach im erziehenden Unterricht neben jenen die gleiche Bedeutung[2]).

[1]) Welche unnötige Last von Arbeit und Ärger auf seiten des Lehrers wie des Schülers mit solchen Verschmelzungen verbunden ist, kennzeichnet Broglie treffend (Technik des kleinen Einmaleins, S. 25), wenn er sagt: „Ein falsches Resultat braucht zur endgültigen Korrektur 30 bis 50 richtige."

[2]) Es soll damit ausdrücklich der extreme Standpunkt abgelehnt werden, als hätte der Unterricht nur das Ziel der Persönlichkeitsentwicklung ohne jede Rücksicht auf Stoff und Kultur.

Im einzelnen zeigen die beiden Arten folgende Unterschiede:

die aufgenommenen	die erarbeiteten
sind leicht und rasch zu erwerben;	sind schwerer und langsamer zu erwerben;
zeigen größere Beweglichkeit, sind locker;	zeigen größeres Beharren, sind fester;
neigen zu unbedingter und unbeschränkter Formulierung;	neigen zu bedingter und beschränkter Formulierung;
zeigen schwache Gefühlsbetontheit und Unsicherheit im Besitz;	zeigen außerdem starke Gefühlsbetontheit und Sicherheit im Besitz;
erscheinen mit fester sprachlicher Formulierung;	erscheinen ohne feste sprachliche Formulierung; diese muß jeweils neu erzeugt werden;
sind nur mit geringer Möglichkeit der Konkretisierung ausgestattet, daher weniger klar.	sind mit der Möglichkeit der Konkretisierung ausgestattet, daher klar.

Aus dieser Gegenüberstellung geht aber nun eins hervor, das durch die Erfahrung täglich bestätigt wird: daß nämlich die aufgenommenen Abstraktionen dem Kinde ungleich leichter fallen als die erarbeiteten. Und die psychologische Forschung fügt hinzu, daß die Kinder eigentlich vor einem gewissen Lebensalter gar nicht fähig seien, Abstraktionen selbständig zu bilden. So schreibt Max Brahn[1]): „Genaue Untersuchungen zeigen immer mehr, daß erst von der Pubertät an das Denken im strengen Sinne sich entwickelt, die Fähigkeit, Begriffe zu bilden, zu vergleichen und aufeinander zu beziehen, daß bis dahin alles Denken einen starken anschaulichen Hintergrund hat ... Unsere Volksschule wird so lange nicht den Ansprüchen der Zeit genügen, als sie die Schüler trotz ihrer vortrefflichen Methoden und Lehrer nicht denken lehren kann, weil keine Methode erzeugen kann, was die natürliche Entwicklung nicht hergibt." Und Ernst Meumann wurde nicht müde, in seinen Werken diese Erkenntnis der neueren Psychologie immer und immer wieder zu betonen[2]).

[1]) Zitiert von Böttger, Deutsche Schule 1914, S. 653.

[2]) Vor kurzem sah ich, wie eine einfache Frau ihren Kindern, die sie im Kinderwagen bei sich hatte, vom Straßenhändler Eis kaufte. Das größere Kind konnte im 3. Jahre sein, das kleinere im 2. Ich war nicht wenig betroffen ob solchen Unverstandes. Dann aber sagte ich mir: Wir tun ja eigentlich in der Schule dasselbe. Bei all unseren Darbietungen und Forderungen nehmen wir an, der Geschmack, die Bedürfnisse und die Verdauungsfähigkeit der Kinder auf geistigem Gebiet seien von der unseren nicht wesentlich verschieden, eigentlich nur quantitativ geringer. Daß auf körperlichem Gebiete ganz beträchtliche Ver-

Damit wird von wissenschaftlicher Seite bestätigt, was der Praktiker schon längst vermutete, daß nämlich die logischen Gedankenreihen der Kinder zum größten Teil **unsere** Gedankenreihen seien. Zeigen das nicht freie Aufsätze auch größerer Kinder noch? Müssen sich nicht kleine wie große Schüler an einen neuen Lehrer erst gewöhnen, d. h. doch in der Hauptsache, sich auf seine Denkreihen einstellen? Wird es nicht allgemein als besonders schwierig hingestellt, von einem fremden Examinator geprüft zu werden? Wer die Augen auftut und die Fehler der Schüler nach Salzmanns Wort zunächst in sich sucht, kann Wunderdinge erleben. Eine besonders große Täuschung in dieser Beziehung ist es, wenn wir glauben, durch unsere Entwicklungsfrage hätten die Schüler erarbeitete Abstraktionen erworben. Selbst wenn das an sich möglich wäre, würde doch das **einmalige** Durchlaufen eines solchen Gedankenganges in der Regel nicht genügen, um **selbständig** das Gefühl der Widerspruchslosigkeit zu erleben, aus **eigener** Überzeugung seine Zustimmung zu geben. Das geht sogar uns Älteren noch so. Aber unsere Lektionen gehen von der Annahme aus, daß bei Kindern ein **einmaliges** Durchlaufen genüge.

Die Schule muß daher folgendes Bekenntnis ablegen: Indem wir mit dem Kinde, auch mit dem jüngeren Kinde, Abstraktionen erarbeiteten, glaubten wir, daß diese Abstraktionen als von dem Kinde selbst erarbeitete gelten könnten und demgemäß auch die Wirkungen der erarbeiteten Abstraktionen aufweisen würden. Darin haben wir uns getäuscht. Diese Abstraktionen haben für die innere Entwicklung des Kindes nur den Wert der aufgenommenen[1]).

Auf Grund solcher Erkenntnis wollen wir uns nun hüten, die Entwicklung stärker zu beschleunigen, als es die Natur zuläßt. Wir wollen keine Schnittblumen ziehen, nicht Fliederblüten im Februar, sondern Bäume, die ihre Frucht bringen zu seiner Zeit[2]). Damit ist aber nicht gesagt, daß wir auf die **Förderung** der Entwicklung verzichteten, keineswegs. Aber wir sehen sie darin, alles bereit zu stellen für die Arbeit der Natur. Auch die Abstraktion hat

schiedenheiten vorhanden und zu berücksichtigen sind, das sehen die meisten ein; daß es auf geistigem Gebiete nicht anders ist, will den wenigsten in den Kopf, mindestens glauben sie, die logischen Hauptsätze müßten für das Kind dieselben sein wie für uns.

[1]) „Von den vielen Formen einer Verbildung des Geistes wird für die Ausbildung einer tüchtigen Verstandeskraft wahrscheinlich ein zu frühes Umgehen mit Abstraktionen am schädlichsten sein." Branford, Betrachtungen über mathematische Erziehung, S. 13. Über das Verhältnis des Konkreten zum Abstrakten enthält das Werk eine Fülle feinsinniger Ausführungen, unter anderen S. 57, 132, 300, 305, 311, 315 usw.

[2]) Wer mit diesem Bilde näher vertraut ist, weiß auch, welch starke Schädigung ein junger Obstbaum erleidet, der frühzeitig zum Früchtetragen gezwungen wird.

wie jede geistige Tätigkeit ihre Vorstufen, ihre Knospenform, aus der sie langsam herauswächst. Diese Vorstufe ist für das Kindesalter verhältnismäßig leicht zu bestimmen: Die erarbeite Abstraktion erwächst nämlich aus der Form einer **unscharfen Bezeichnung eines sinnlich vorgestellten Einzelfalles.** Bei Pferden stellt sich das Kind solche von bestimmter Gestalt und Farbe vor, es sagt aber gleich uns nur „Pferd", nicht, wie es seiner Vorstellung entsprechen würde: Braunes Droschkenpferd, geschecktes Lastpferd. Es spricht mit uns 3 · 3, es denkt aber an Apfelsinen oder Kegel oder Soldaten (solange hier nicht eine aufgenommene Abstraktion vorliegt). Daß diese Vorstufe in ihrem Anfange rein sinnlich anschaulich ist, gegen ihr Ende aber schon unserer Abstraktion nahe kommt, das braucht nicht weiter ausgeführt zu werden.

Interessanter noch ist, daß wir die rechte Entwicklung der Abstraktionsfähigkeit dadurch wesentlich unterstützen, daß wir ihr v o r z e i t i g e s E i n t r e t e n v e r h i n d e r n. Es ist ja ohne weiteres klar, daß alle unsere Abstraktionen eine Erleichterung und bequemere Gestaltung unseres Gedankenverkehrs bedeuten; und es bedarf keiner großen Beobachtungsgabe, um zu erkennen, daß in jeder Seele von Natur dieser Trieb zur Erleichterung vorhanden ist, daß also Abstraktionen willig aufgenommen werden, und daß auch die erarbeiteten Abstraktionen gewissermaßen a l l e i n wachsen, wenn sie den geeigneten Nährboden finden. Dieser Nährboden aber ist einzig und allein die Anschauung, wie wir sie geschildert haben, die allseitige klare Anschauung. So widersinnig es daher auch klingen mag, so ist es doch psychologisch und schulpraktisch völlig begründet, wenn man behauptet: Wir fördern die Abstraktion dadurch, daß wir sie verhindern — besser und klarer ausgedrückt und zugleich als Beispiel für diesen Satz: Wir fördern die vorsichtige, auf Bedingungen und Beschränkungen achtende Abstraktionsfähigkeit dadurch am meisten, daß wir die frühzeitige Gewöhnung an aufgenommene Abstraktionen zurückdrängen, statt dessen so weit als möglich die Konkretisierung verlangen, d. h. einen gewissen Zwang ausüben zu klaren und deutlichen Vorstellungs- und Erinnerungsbildern [1]).

[1]) Wir sollten endlich aufhören, von den Kindern uns mit Beispielsätzen abspeisen zu lassen wie diesen: Der Baum blüht, der Hund bellt, der Jäger schießt den Hasen. Sie sollten heißen: Vor ein paar Wochen blühten die Fliederbäumchen am Schmuckplatze, oder jetzt blühen die Linden im Schulhofe; dieser Spitz bellt gleich, wenn ein fremder kommt; unser Pudel bellt bloß, wenn man ihn neckt; Schneiders kleiner Hund bellt so laut, daß man es auf der Straße hört; ich habe noch keinen Jäger gesehen, der Hasen schoß; wenn die Jäger Hasen schießen, dürfen die Kinder nicht hin. Solche Sätze hätten Blut und Leben; und es ist uns nicht fraglich, daß unsere Schule ein gutes Geschäft machen würde, wenn sie für solche Konkretisierungen eine Menge aufgenommener Abstraktionen dahingeben dürfte.

Wir verhindern selbstverständlich dadurch nicht die Abstraktion, ebensowenig, wie wir verhindern können, daß ein Baum die Früchte seiner Art bringt. Wir verhindern nur die starke Gewöhnung an formulierte Abstraktionen, wir verhindern vor allem die mechanische Aufnahme solcher Abstraktionen, die notwendigerweise selbst erarbeitet werden müssen.

Damit gelangen wir zur Hauptfrage des Abschnitts:

Wie steht es nun in dieser Hinsicht mit den Abstraktionen des Rechenunterrichts? Man darf sich hierbei nicht der Tatsache verschließen, daß für recht viele unserer Kinder — sollen wir sagen: die meisten? — gegenwärtig noch das Rechnen eine Welt für sich ist, die mit der wirklichen Welt nur selten etwas zu tun hat, eigentlich nur bei „Wörteraufgaben" (eingekleideten Aufgaben). Und da — so denken unsere Kinder — kann man eigentlich nie wissen, ob es richtig ist. Ja, rechnen — sie meinen die Beherrschung der Assoziationen — rechnen können wir, aber die Wörteraufgaben, da wird es manchmal umgekehrt gemacht[1]).

Kann man sich ein vernichtenderes Urteil über unsern Rechenunterricht denken, als dies aus Kindermund? Aber — wenn wir es nicht schon wüßten — wir entnehmen diesem Worte zugleich noch eine andere Erkenntnis, nämlich die, daß das gesamte Rechnen zu den Abstraktionen der zweiten Art, zu den erarbeiteten gehört, auch in den Formen, die später mechanisiert werden müssen. Denn wenn das Lehrverfahren unseres Rechenunterrichts dieser Erkenntnis gemäß ausgestaltet wäre, wenn Ziel und Lehrplan auf ihr aufbauten, dann würde jenes Urteil unmöglich sein.

Welche Folgerungen ziehen wir daraus? Ein Heißsporn könnte meinen, daß man dann das gesamte Rechnen am besten bis zum 12. Jahre hinausschieben möchte, und damit wäre die Frage nach dem Lehrverfahren vorläufig beantwortet. Aber so leicht ist das Problem nicht zu lösen. Eine etwaige Hinausschiebung bedarf gründlichster Erwägung. Hier dürfen wir jedenfalls diesen Gedanken beiseite stellen, um uns an die gegebene Wirklichkeit und unsere vorliegende Aufgabe zu halten. Diese verlangt, aus unsern Erkenntnissen praktische Folgerungen für das Lehrverfahren zu gewinnen. Es sind folgende:

[1]) Wir haben die Erfahrung, der diese kindliche Rede Ausdruck gibt, schon wiederholt machen müssen. Wir können bei der Stärke dieses Eindruckes kaum annehmen, daß jemand bei vorsichtiger psychologischer Beobachtung an der Mehrzahl seiner Kinder wesentlich bessere Erfahrungen wird machen können. Allerdings unter der Voraussetzung, daß mit den Kindern nicht „entwickelt" wird, wo sie sich selbst hineinbeißen lernen sollen.

1. Wir wollen in unserm Rechenunterrichte nichts mechanisch auswendig lernen lassen, sondern alles auf die Anschauung als die oft wiederholte, planmäßige und allseitige Auffassung gründen. Insbesondere soll uns auch das Einmaleins die abstrakte Formel sein aus konkreten Formen einfachster Schlußrechnungen.

2. Wir wollen uns klar sein über zwei Irrtümer. Über den, daß jemand verlangen sollte: Die Schüler müssen vom gegenständlichen, sinnlichen Rechnen möglichst bald loskommen. Gerade das Gegenteil ist richtig: Wir müssen die Kinder so lange beim gegenständlichen, sinnlichen Rechnen belassen, als ihnen dies nicht als eine Last erscheint, die sie gern abwerfen möchten. Wir brauchen durchaus nicht zu fürchten, sie würden dann überhaupt nicht von der Anschauung loskommen, die Begründung dafür ist schon gegeben. — Und dann über den anderen Irrtum, daß jemand, der sich von dem langsamen Reifen der Abstraktion überzeugt hat, nun fordern wollte, man müsse darum mit der Abstraktion noch zeitiger einsetzen und sie noch intensiver treiben.

3. Wir wollen bedenken, daß, je einseitiger die Veranschaulichung erfolgt — z. B. mit einem einzigen Rechenlehrmittel oder mit einem einzigen Lösungsverfahren — sich um so leichter die Form der aufgenommenen Abstraktion einstellt, d. h. daß mechanisch eingelernt wird.

4. Wir wollen uns dagegen bemühen, auch die reinen Zahlenaufgaben recht oft auf konkrete Fälle zurückzuführen; selbstverständlich nicht jede solche Aufgabe, aber in jeder Stunde soll es geschehen, so daß die Möglichkeit für das Kind daraus erwächst, jede Zahlaufgabe zu versinnlichen. Die Wichtigkeit dieses Tuns verlangt, daß es hin und wieder auch noch auf der Oberstufe geschehe.

Es ist nichts Neues, was wir hier verlangen. Pestalozzis Grundsatz, daß „die Anschauung das absolute Fundament aller Erkenntnis sei", daß also „jede Erkenntnis von der Anschauung ausgehen müsse und auf sie zurückgeführt werden könne", gab dem Rechenunterricht zunächst eine natürliche und sichere Grundlage. „Es kann nicht anders sein; wenn wir z. B. bloß auswendig lernen: Drei und vier ist sieben, und dann auf diese Sieben bauen, als wenn wir wirklich wüßten, daß drei und vier sieben ist, so betrügen wir uns selbst; denn die innere Wahrheit dieser Sieben fehlt, indem wir uns des sinnlichen Hintergrundes, der ihr leeres Wort uns zur Wahrheit machen kann, nicht bewußt sind[1])."

Ein Beispiel dafür, wohin wir mit unserm Abstraktionseifer ge-

[1]) Zitiert nach Büttner, Anleitung S. 60.

kommen sind, bietet eben diese Anführung. In fast allen Büchern über allgemeine und Rechenmethodik findet man sie. Aber das Lehrverfahren des Unterrichts ihr gemäß zu gestalten, insbesondere sie auf dem Gebiete des Rechenunterrichts zu verwirklichen, das vermeinte man wohl, aber tatsächlich hat es kaum jemand gewagt. Diese Pestalozziworte waren aufgenommene Abstraktionen, die wir recht schön herzusagen wußten, ohne uns ihres tiefen Sinnes und Inhalts bewußt zu werden. Nur wo eine Seele in ehrlichem Ringen um didaktische Wahrheit sie als erarbeitete Abstraktionen nachschuf, da konnte des Meisters Geist in ihr lebendig werden in befreiender Tat. Es ist hier genau so wie mit dem Herr, Herr! sagen: nicht die das können, kommen ins Himmelreich, sondern die den Willen des Vaters tun.

2. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die Gewinnung der Zahlbegriffe.

§ 19. Die Erwerbung der Zahlenreihe.

Unter den Stufen, die die Entwicklung der Zahlbegriffe durchschreitet — wie wir es in früheren Ausführungen dargelegt haben — ist es besonders die dritte, die unsere Aufmerksamkeit fesselt, wenn wir diese Entwicklung unter dem Gesichtspunkt des dem natürlichen Wachstums entsprechenden Lehrverfahrens betrachten. Es ist die Stufe, welche die einzelnen Zahlbegriffe von fünf an entwickelt, soweit sie sich ohne Erfassung des Systems gewinnen lassen, die Stufe, welche die Zahlenreihe erwirbt. Denn die vorhergehenden Stufen, die des rohen Vergleichs mit der Erwerbung einiger unbestimmter Zahlbegriffe und die des genaueren Vergleichs mit der Gewinnung der bestimmten Zahlbegriffe 1 bis 4 fallen im allgemeinen vor die Schulzeit, d. h. die in die Schule eintretenden Kinder stehen meist am Ende der zweiten Stufe — von Ausnahmen abgesehen. Zwar werden auch Ausführungen über ein etwaiges Lehrverfahren für die zweite Stufe ein gewisses Interesse beanspruchen, zumal bei psychologisch interessierten Lehrern, die sich gern der Schwachen annehmen. Aber es läßt sich von vornherein erwarten, daß es sich nicht grundsätzlich unterscheiden wird von dem Lehrverfahren des Elementarunterrichts, welches die Pädagogen in wesentlich höherem Maße interessiert. Denn der psychische Habitus des Kindes ändert sich während der zweiten und des ersten Teils der dritten Stufe nicht wesentlich und ist gekennzeichnet durch die noch völlig sinnliche Bedingtheit seiner

Vorstellungen. Auch handelt es sich sowohl bei der zweiten als auch bei der dritten Stufe um das Erwerben solcher Assoziationen, da ein bestimmter mathematischer Sachverhalt, eine Anzahl Dinge mit einem bestimmten sprachlichen Ausdruck, dem Zahlwort, verbunden werden. Die Erfassung auch der Anzahlen, welche nicht mehr mit einem Blicke vom Kinde übersehen werden, und welche darum eines neuen Hilfsmittels, der Wortreihe, bedürfen, stellt eben den Fortschritt der dritten Stufe dar.

Was diese Stufe verlangt, ist im wesentlichen eine Gedächtnisleistung, mit psychologisch genauerem Ausdruck eine Assoziation, die anfangs sukzessiv ist, später simultan wird und aus Assimilation und Komplikation besteht. Mit der Wiederholung gewinnt sie an Festigkeit, Klarheit und Deutlichkeit. Bei diesen und ähnlichen Gedächtnisleistungen unterscheidet man nun zwei Stufen der Entwicklung: einerseits wenn die Erwerbung nur so weit gediehen ist, daß ein Wiedererkennen oder ein Erkennen eintritt, andrerseits, wenn sie solche Fortschritte gemacht hat, daß eine Reproduktion möglich ist. In diesem Sinne unterscheidet z. B. die psychologische Gedächtnisforschung Wiedererkennungs- und Reproduktionsmethoden. Doch ist zu beachten, daß der weitaus größere Teil unserer Gedächtnisstoffe nur bis zur Höhe der ersten Stufe entwickelt wird. Einige Beispiele: Man bemerkt, daß man dies Gedicht schon einmal gelesen hat — Wiedererkennung; man trägt es vor — Reproduktion. Wir hören ein Musikstück und sagen, es sei die Tannhäusereinleitung — Wiedererkennung; wir spielen es — Reproduktion. Ein Kind sieht der Pferdeschwemme zu und spricht: Das Pferdchen wird gewaschen — Erkennung der Tätigkeit; die Mutter sagt zum Kinde: Wasche dich! und es geschieht — Reproduktion der Tätigkeit. So können wir ein Ding erkennen — z. B. eine Heftklammer, und können die Vorstellung zeichnerisch und sprachlich reproduzieren, wenn wir etwa einem Kinde Material, Form, Zweck und Gebrauch der Heftklammer erklären wollen.

Auch bei der Gewinnung der Zahlbegriffe auf dieser Stufe handelt es sich um diese zwei Gedächtnisleistungen: Erkennung und Reproduktion. Wir bezeichnen sie hier mit Zahlauffassung und Zahldarstellung. Ein Kind zählt ein Häufchen Nüsse und sagt: es sind 8. Ein andermal sagt der Vater: Du darfst dir aus dem Korbe 6 Nüsse nehmen, und das Kind zählt 6 ab. Diesem Beispiel gegenüber wird nun mancher vielleicht behaupten wollen: Das ist doch genau dasselbe; das eine Mal wird gezählt, und das andere Mal auch nur. Und doch ist dies nicht richtig, und der psychologisch Geschulte sieht den Unterschied: In jedem der beiden Fälle ist die Aufmerksamkeit anders eingestellt; im ersten ist die Sachvorstellung einer Menge da und dazu das Aufgabebewußtsein

mit der Frage wieviel? im zweiten Falle ist die **Zahlgröße** im Bewußtsein vorhanden, und es soll eine Sachmenge festgestellt werden, die dieser Zahlgröße entspricht. Die Ähnlichkeit der beiden Erscheinungen ist darin begründet, daß in beiden Fällen derselbe Maßstab und dieselbe Tätigkeit angewendet wird. Aber im ersten ist die Sache vorhanden und deckt einen zu bestimmenden Teil der Zahlenreihe, im zweiten ist die Zahlenreihe da und deckt einen zu bestimmenden Teil der Sache.

Mit diesen Ausführungen sind wir bereits eingegangen auf das Verfahren, mittels dessen das Kind seine Zahlvorstellungen und damit seine Zahlbegriffe gewinnt, das ist das **Zählen**.

Es soll hier nicht ausführlich eingegangen werden auf den **Streit der Zähler und Anschauer** im elementaren Rechenunterricht. **Meumann** hat mit trefflicher Beobachtung und vielem Scharfsinn eine ganze Anzahl Vorzüge jeder der beiden Methoden aufgestellt, die entsprechend als Nachteile bei der anderen Methode erscheinen[1]). Er kommt vom theoretischen Standpunkt zu demselben Ergebnis, zu dem uns auch der praktische geführt hatte, daß jedes einzelne Prinzip auf die Spitze getrieben einseitig ist und Gegnerschaft hervorrufen muß, daß **allein** also weder die Zähler noch die Anschauer recht haben. Man könnte hier jeglichen Streit fallen lassen und sich auf psychologischem Boden sofort einigen. Dieses Einigen bedeutet hier tatsächlich ein Vereinigen.

Weitgehende psychologische Untersuchungen stimmen darin überein, daß die Zahlbegriffe der dritten Stufe **mittels des Zählens** erworben werden, d. h. daß die Reihe als Maßstab dient, die Zahlreihe, die Wortreihe. Darauf weist auch unzweifelhaft die pädagogische Erfahrung hin, wobei diejenige der Lehrer an Hilfsschulen hier besondere Bedeutung und Beachtung beanspruchen darf. Denn sie erleben fortgesetzt an ihren Kindern die Entwicklung einer Stufe, die normale Kinder zum Teil schon hinter sich haben oder doch auch bei einer Behandlung, welche der Natur nicht ganz entspricht, überwinden. Diese Überwindungskraft ist bei den Schwachsinnigen so gut wie nicht vorhanden. Die Lehrer sind also genötigt, viel mehr zu beobachten und sich viel mehr anzupassen als die normaler Klassen. Ihre Erfahrung geht nun dahin, daß sie allein mit der Zählmethode Erfolge erzielt hätten, zumal sich bei dieser Methode mit großem Vorteil das motorische Element nutzbringend verwenden lasse (Sprechen, Handbewegungen usw.). Soweit haben die Zähler recht.

Aber **Gewinnung** der Zahlbegriffe ist doch nicht gleichbedeutend mit **mechanischer Verfügbarkeit** und vor allen

[1]) Vorlesungen Bd. III, S. 658ff., Abriß S. 384ff.

Dingen nicht mit derjenigen selbständigen Fortentwicklung der Zahlbegriffe, welche wir in den ruhenden Beziehungen der Gliederung und des Vergleichs geschildert haben. Und zu dieser Form des geistigen Besitzes müssen unsere Zahlbegriffe gelangen, möglichst auch die der Hilfsschüler. Für diesen Zweck genügt das Abtragen der Zahlreihe nicht mehr, hier heißt es überblicken können, und nun kommen die Anschauer zu ihrem Rechte. Von dieser psychologischen Warte aus ist es völlig verständlich, ja gar nicht anders zu erwarten, daß man mit Zahlbildern keine guten Erfahrungen hat machen können mit Schwachen, die sich beim Schuleintritt noch auf der ersten oder zweiten Stufe der Zahlbegriffsentwicklung befinden, recht gute Erfolge dagegen zu verzeichnen hat bei entwickelteren Kindern, bei solchen, wo die Erfassung der Zahlenreihe schon bis zu einem nicht geringen Grade erreicht war, die beim Schuleintritt also schon ein Stück der dritten Entwicklungsstufe zurückgelegt hatten. Wenn daher Zählmethode und Anschauungsmethode nacheinander auftreten, so kann jede von ihnen am richtigen Platze sein, sie werden einander in ausgezeichneter Weise ergänzen, und die Erfolge werden dementsprechend sich steigern.

Die Erwägungen und Erfahrungen in dieser Richtung haben uns gelehrt, zwischen Zählen und Überblicken noch eine Zwischenstufe einzuschalten, die nicht unbedeutsam erscheint, nämlich das rhythmisierte Zählen. Zur Begründung der Forderung können wir hier auf unsere Ausführungen über die Entwicklung des Zahlbegriffs im System verweisen.

Endlich muß noch auf einen andern schon ausgeführten Gedanken zurückverwiesen werden, daß nämlich auf der dritten Stufe die gewonnenen Zahlbegriffe zunächst noch völlig an dingliche und ganz individuell ausgestattete Stellvertretungsvorstellungen gebunden sind. Aber auf derselben dritten Stufe beginnt das Kind doch schon, nach und nach davon abzusehen. Die Entwicklung geht also dahin, Übergänge zu suchen nach den späteren Stellvertretungsvorstellungen der Zahlbegriffe in einer weniger dinglich und individuell ausgestatteten Sachvorstellung. Solche Erwägungen — oder an ihrer Stelle die Intuition dahingehender zweckmäßiger Maßnahmen — führten den Rechenunterricht auf die Erscheinung der dinglichen Zahlensymbole. Es sind dies Anschauungsmittel, die zwar noch dinglicher Natur sind, aber durch absichtliche Merkmalsarmut den individuellen Charakter der wirklichen der Zählung unterliegenden Gegenstände stark eingebüßt haben[1]).

[1]) Es soll gleich an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß bei einer einzigen solchen Symbolisierung die Kinder leicht eben dieses eine Symbol an Stelle der Sachvorstellung rücken, so daß dann eigentlich nur die eine Sachvor-

Für das Gesamtgebiet der dritten Stufe — Entwicklung des Zahlbegriffs — hätten wir somit drei G l i e d e r u n g s m o t i v e gewonnen, die das Lehrverfahren zu berücksichtigen hätte: der verschiedene Grad der Gedächtnisleistung in Zahlauffassung und Zahldarstellung; die Erweiterung des Aufmerksamkeitsumfanges im Zählen, im rhythmisierten Zählen und im Überblicken; endlich die Tatsache der leise beginnenden Abstraktion, die sich zeigt in einer Ersetzung der Dinge durch dingliche Symbole. Damit würde sich diese dritte Stufe in 12 Entwicklungsformen gliedern lassen, die sich kurz so aussprechen ließen: Z a h l a u f f a s s u n g u n d Z a h l d a r s t e l l u n g a n D i n g e n u n d d i n g l i c h e n S y m b o l e n m i t t e l s d e s Z ä h l e n s, d e s r h y t h m i s i e r t e n Z ä h l e n s u n d d e s Ü b e r b l i c k e n s. Diese Entwicklungsformen greifen vielfach ineinander und wechseln oft im Unterricht. Aber vom Lehrer ist zu verlangen, daß er jeden Augenblick völlig klar darüber ist, welche dieser Formen jeweilig der Übung und Weiterführung bedarf.

Die erste und einfachste von ihnen ist ohne Zweifel die, d a ß d i e Z a h l a u f f a s s u n g z ä h l e n d a n w i r k l i c h e n D i n g e n g e ü b t w i r d. Dazu sollte der Elementarunterricht in fast jeder Stunde Gelegenheit und Veranlassung bieten. Wenn die Kinder im Schulzimmer eingetroffen sind, werden sie gezählt; selbst wenn noch nicht alle da sind, kann das geschehen. Die einzelnen Abteilungen, die Kinder der einzelnen Bankreihen, die Knaben, die Mädchen werden für sich gezählt. Dazu die Schulsachen der Kinder, die Gegenstände der Schulstube, die Schulgeräte, welche ausgeteilt werden, die Kreidestückchen, die übrig sind. Und draußen zählen wir — d. h. selbstverständlich immer die Kinder — die verschiedenen Gräser, die die Kinder sammeln, die Blumen, die sie pflücken, die Maikäfer, die sie fingen, Erdbeeren und Kirschen, die sie erhielten. Wir zählen die Grade am Thermometer, die Regentropfen auf der Hand, die Schmetterlinge im Garten und die Pilze und Beeren im Walde, die Wäschestücke auf dem Rasen oder an der Leine, die Fliegen am Fenster, die Räder an den Wagen, die Schlitten auf der Straße, die Lokomotiven, die durch die Brücke fahren, zählen Sperlinge und Krähen, Bälle, Kreisel, Soldaten, Droschken, Elektrische, Autos, Schutzleute, Pferde, Hunde, Hühner und alle sonstigen Haustiere, zählen unsere Schritte von einer Ecke zur anderen, zählen bei unseren Turnübungen, zählen überhaupt alle Dinge und Erscheinungen, die in unsern Gesichtskreis treten. Das darf selbstverständlich nicht falsch verstanden werden. Keineswegs ist damit gemeint, daß wir nun kein anderes Interesse an den Dingen hätten, als das

stellung von einer anderen abgelöst wird. Will man dies verhindern und damit eine wirkliche, nicht bloß eine vermeintliche Abstraktion vorbereiten, so ist es zweckmäßig, mehrere Symbolisierungen im Wechsel miteinander zu verwenden.

quantitative, als das des Maßes, nicht im geringsten. Aber so ist es gemeint, daß wir über der qualitativen Beschreibung und über kausalen Zusammenhängen nie, aber auch bei keinem Gegenstande das quantitative Moment vergessen wollen. Wir wollen mit solcher Tätigkeit das in den Kindern vorhandene quantitative Interesse fördern und es benutzen, um die Zahlenreihe einerseits, die ihr entsprechenden Dingmengen andererseits in vielfacher Auffassung und Übung zum geistigen Eigentum zu machen.

Eintönig erscheint dies „ewige Zählen" und langweilig dem, der sich vom Lehrplane vorwärts gedrängt fühlt; zumal, wenn er hört, daß wir uns bei allen diesen Übungen damit begnügen, festzustellen, wieviel es sind, nichts dazutun lassen und nichts hinwegnehmen wollen. Aber es ist weder eintönig noch langweilig, wenn der Lehrer über den Stoff verfügt — hier natürlich in rechenpsychologischer Hinsicht — und seine Kinder beobachtet, jedes einzelne, und in diesem schrecklichen Zählen auch noch Unterstufen der Entwicklung ausfindig macht, auf die die einzelnen Kinder einzeln gelangen folgendermaßen: Zuerst wird nur so gezählt, daß das einzelne Ding dabei eine kleine Platzveränderung erleidet; Nüsse, Kastanien, Steinchen, Kreidestückchen und alle passenden kleineren Dinge werden vom zählenden Kinde ein klein wenig nach links geschoben; Kinder werden berührt und müssen sich setzen. Eine zweite Stufe, die angeblich — d. h. den Kindern gegenüber — viel schwerer ist, wird ihnen darin vorgeführt, daß man die Dinge an ihrem Orte läßt, sie nur berührt. Das ist Zählen mit Tippen, und wer das gelernt hat, der kann schon viel mehr und berichtet mit Stolz zu Hause von seinen Erfolgen[1]).

Eine 3. Unterstufe ist es, wenn einer Zählen ohne Tippen lernt, bloß mit Zeigen. Das läßt sich auch wieder an all den handlichen Dingen üben, die in unsern Bereich kommen, außerdem aber auch an den Kindern auf dem Spielplatze, an den Fenstern der Häuser, den Fahnen an den Fenstern, den Fliegen an der Decke, den Bäumen der Straße, den Laternen eines Platzes usf. Auf die 4. Unterstufe endlich erhebt sich, wer zählen kann selbst ohne zeigen, bloß mit den Augen. Erschweren lassen sich die beiden letzten Stufen auch noch durch bewegliche Objekte, Sperlinge, Krähen, Schmetterlinge und sonstwelche Tiere, Spaziergänger, Geschäftsleute, Radfahrer, Autos, Eisenbahnwagen usw.

---

[1]) Sollte ein Lehrer darin keine Erschwerung finden, so raten wir ihm, den Versuch zu machen, einen Teller voll Nüsse oder Kastanien oder Eier — nur eine Schicht, nicht aufeinander gehäuft — in dieser Art zu zählen. Er kann ja daneben die erste Form mit der Platzveränderung versuchen. In der zweiten ist die Aufgabe für Kinder vielfach noch zu schwer; das Beispiel soll ja auch nur darauf aufmerksam machen, wie selbst der Erwachsene unter Umständen zu der Erleichterung greift, die Dinge beim Zählen ein wenig vom Platze zu rücken.

Täglich werden auch diejenigen Kinder gezählt, die die einzelnen Stufen erreicht haben, Knaben und Mädchen besonders. Diese Übungen beanspruchen nicht übermäßige Zeit, täglich nur Minuten. Wir wollen nicht sagen: eine halbe Stunde, weil es ja vorkommen kann, daß es viermal hintereinander 5 Minuten, oder zweimal 10 Minuten, oder einmal 25 Minuten oder auch mehr oder weniger werden. Aber zweierlei ist nötig: täglich, um der Gewöhnung willen, und gefühlsbetont, interessant, anregend. 1+1=2 gelingt viel schwerer, gefühlsbetont zu gestalten für diese Stufe, selbst wenn man Puppen oder Soldaten vorstellen läßt. Das — meint das Kind — habe es längst gewußt und brauche es nicht zu lernen, daß 1+1 2 seien. Aber etwas können, etwas leisten — es braucht gar nicht objektiv zu sein, sondern nur in der Annahme der Kinder —, das gibt Ansporn, da will jedes mit. Und z. B. zählen können schon ohne Tippen, bloß mit Zeigen, das ist eine Leistung; die Mutter zu Hause mag sie einmal nachmachen, dann wird sie sie anerkennen.

Eine wichtige Frage ist noch zu erörtern, die nämlich, wie weit wir auf dieser Stufe zählen dürfen. Aus langjähriger Erfahrung und aus herzlichem Mitgefühl wie auch aus psychologischer Beobachtung der Kindesnatur schlagen wir vor: ohne jede Grenze. Welchem Elementarlehrer hätte es nicht jedesmal einen Stich ins Herz gegeben, wenn ein frisches Kindergesicht erklärte, es könne bis 20 zählen oder bis 30 — und er doch nur bis zur 10 rechnen lassen durfte, weil der Lehrplan es so vorschrieb! In der Tat, wer die Grenzen der Zahlenräume für den elementaren Rechenunterricht bis 10 oder bis 20 abgesteckt hat, ist gewiß ein logischer Kopf, vielleicht auch ein wohlmeinender Mann gewesen, aber ein Psycholog und Kinderfreund nicht; oder er hat nicht bedacht, daß die Bestimmung Zahlenraum bis 10 nun vom Schulmeister so ausgelegt werden würde, daß es verboten sei, darüber hinauszugehen, wenigstens offiziell. Nur privatim dürften Kinder des 1. Schuljahres ihre Zahlbegriffe zwischen 10 und 100 erweitern; im 2. Schuljahre „lernten" sie beispielsweise an geeigneter Stelle die 19 „kennen", vorher kannten sie nur die Zahlen bis 18. Welche Unnatur zeigt sich in dem allen! Unsere Erfahrung ist die, daß eine solche Begrenzung deutlich die Wirkung hat, das Interesse des Kindes am Rechnen und seine Lust am Fortschritt stark abzuschwächen.

Zwar kommen auf unsere Art die Kinder zunächst verschieden weit, und die „gleichmäßige Förderung aller" läßt zu wünschen übrig, wenigstens in dem Sinne, daß alle Kinder eines Jahrgangs dasselbe gleichmäßig gut können. Aber wir beginnen mit neuen Übungsformen, wenn der Standpunkt der Schwächeren es gestattet.

Inzwischen wollen wir aber keinesfalls die Begabteren aufhalten. Sie bekommen, wenn die Erweiterung der Zahlenreihe nicht mehr genügt, auch schwerere Übungen. —

Der Zahlauffassung gegenüber steht die Zahldarstellung an wirklichen Dingen. Aber sie kommt nicht hinterher, an zweiter Stelle, sondern — das sei gleich vorausgenommen — sie zeigt sich in stetem Wechsel mit der ersteren, selbstverständlich mit den durch die Umstände gebotenen Beschränkungen. Haben wir die anwesenden Kinder gezählt, so heißt es z. B.: 8 kommen vor, die vorderen 4, die hinteren 10 stehen auf. Dabei führt jedesmal ein anderes Kind das Zählen laut und deutlich aus, während die anderen zeigend nachprüfen. Oder: 20 Kreidestäckchen sollen ausgeteilt werden, 10 Perlen nimmt jedes Kind aus seinem Kästchen usf.

Auch bei dieser Form können wir Unterstufen unterscheiden, die freilich nicht ganz denen der ersten Form entsprechen. Die erste, die die verlangte Zahl von der ungezählten Menge absonderte, auch räumlich, ist hier dieselbe wie dort; man ersieht sie aus den oben genannten Beispielen. Jenem Zählen mit Tippen aber entspricht hier eine Stufe, die von sehr großer Bedeutung ist, das ist das Malen. Es wird einfach alles gemalt: 4 Jungen, 4 Mädchen, 6 Blumen, 3 Zuckertüten, 5 Bäume, 12 Stare in der Luft; was uns überhaupt in den Weg kommt, wird, ebenso wie es gezählt wird, in bestimmten Zahlangaben gemalt. Und rasch muß es gehen, nach Diktat, die ganze Tafel voll; ganze Geschichten werden daraus: 3 Jungen kreiseln auf dem Spielplatz: 3 Jungen, 3 Kreisel, 3 Peitschen; 2 Mädchen treiben Reifen: 2 Mädchen, 2 Reifen, 2 Hölzer; kommen noch 2 Jungen dazu und wollen mitspielen; kreiseln geht nicht ... es sind bloß 3 Kreisel da ... reifen auch nicht, da spielen sie Kämmerchen vermieten; es sind im ganzen 7 Kinder, sie brauchen 6 Bäume, einer ist Häscher usw. Wie das gezeichnet ist, darauf kommt es nicht an, nur darauf, daß man die verlangte Anzahl der Dinge erkennen kann.

Jenem Zählen mit Zeigen entspricht hier das Abzählen einer bestimmten Zahl mit pantomimischer Darstellung. Die kindlich gehaltene Aufforderung dabei heißt: Wir malen es in die Luft und zeigen dazu: 13 Äpfel, 20 Pflaumen, 8 Eier, oder was die Mutter noch in der Speisekammer hat: 4 Schüsseln, 3 Brote, 3 Stücke Wurst, 5 Fischbüchsen usw. Diese Übungsform läßt auch erkennen, wie die für die Anschauung der Zahl wie für die Abstraktion bedeutsame Bewegungsvorstellung mit herangezogen wird. Wenn wir als tiefste Grundlage der Maßzahl die Gleichheit der Bewußtseinsvorgänge ansehen konnten, so ist hier die praktische Folgerung gezogen: Mittels der darstellenden Armbewegung wird sich das Kind der Gleichheit der Vorgänge energisch bewußt; und dabei

ist der Abstraktion vorgearbeitet, indem außer der Bewegungsvorstellung jeglicher andere direkte sinnliche Eindruck fehlt.

Eine letzte, ziemlich schwierige Unterstufe ist es endlich, wenn die Kinder geübt werden, sich eine bestimmte Anzahl von Dingen vorzustellen, ohne Malen und ohne Hände. „Man kann 7 Soldaten sehen und sogar die Augen dabei zumachen. Wer sieht sie?" Dieser Übung wird man freilich nicht allzuviel Ausdehnung geben können, schon weil das Nachprüfen erschwert ist. Aber es ist möglich, wenn man hinzufügt: Zeige sie! Und die Übung ist wertvoll, wenn man etwa in der Lage sich sieht, die Gliederungsbeziehung vorzubereiten: Wo siehst du deine 7 Soldaten? und das Kind antwortet: Hier sind 3, dann noch 3, zuletzt einer; oder: Erst gehen 4 und dahinter 3.

Die bisherigen beiden Formen, die Zahlauffassung und Zahldarstellung an Dingen, an wirklichen oder gemalten oder vorgestellten, gehören zeitlich zusammen. Die Übungen wechseln miteinander, einmal nach Minuten, ein andermal nach längerer Zeit je nach der inneren Notwendigkeit des Fortschritts und der Befestigung. Aber sie müssen erst eine gewisse Höhe der Ausbildung erreicht haben, ehe man zu dem nächsten Formenpaar übergehen kann, der Zahlauffassung und Zahldarstellung an dinglichen Symbolen. Auch hier werden Auffassung und Darstellung in stetem Wechsel geübt. Es dürfte darum an dieser Stelle genügen, darauf hinzuweisen, während in der Praxis des Unterrichts der Lehrer sich jederzeit dessen bewußt sein muß, daß er jetzt Zahlauffassung, jetzt Darstellung übt und üben will.

Bei den Zahlsymbolen denkt man zuerst an die Rechenmaschinen, die sogenannte russische Rechenmaschine, den Tillichschen Rechenkasten, die beide in unzähligen Abänderungen vorkommen, und an die große Gruppe von Rechenmaschinen, welche einzelne Zählkörper in bestimmter Anordnung (ohne Drähte) enthalten. Sie alle sind für den vorliegenden Zweck brauchbar. Daneben können verwendet werden Legestäbchen, Spielmarken, Perlen, Ringe, Linsen, Kastanien, Eicheln, Steinchen usw. Jedes Kind hat eine größere Anzahl davon in seinem Besitze, und sie bedeuten ihm nun — was die Hauptsache ist — Soldaten, Puppen, Früchte, Pferde, Hühner, kurz alles, was jene ersten Übungsformen an wirklichen Dingen zählten und abzählten. Auch die Finger gehören zu diesen dinglichen Zahlsymbolen, es sind während des Zählens freilich keine Finger, sondern Kinder, Fenster, Blumen oder sonst etwas. Und nun werden Geschichten gedichtet, die sich nach den Tageserlebnissen und dem jeweiligen Standpunkte der Kinder verändern: 20 Kinder gehen zum Schützenfest — das wird dadurch dargestellt, daß jedes Kind 20 von seinen Zahlsymbolen abzählt —

2 bleiben an der Würstchenbude stehen ... 4 setzen sich in die Schaukel ... 3 stellen sich an die Schießbude ... die anderen gehen zum Kasperletheater usf. Die Kinder dichten selbst weiter. Man sieht wohl, es ist möglich, *jede* Unterrichtsstunde zahlenmäßig auszunutzen[1]).

Daß derartige Übungen schon nicht geringe Abstraktionsforderungen an die Kinder stellen, dürfte ersichtlich sein. Es ist nicht dasselbe wie jenes Phantasiespiel, da ein Stück Holz als Puppe angezogen und eine umgekehrte Fußbank als Puppenwagen betrachtet wird. Denn die Steinchen, die Früchte darstellen sollen, werden nicht in den Mund genommen, und die Legestäbchen, welche Soldaten verkörpern, werden nicht mit Waffen vorgestellt. Wer sich noch nicht von den Unterschieden zwischen dieser Abstraktionstätigkeit und jener kindlichen Phantasietätigkeit überzeugen kann, mag darauf achten, daß die Kinder dem Ansinnen, das *seien* Soldaten, Puppen, Früchte usw. lebhaften Widerstand entgegensetzen, den man nur dadurch überwinden kann, daß man ihnen suggeriert: Wir haben keine da, wir möchten gern mit ihnen spielen, wir wollen einmal *denken*, wollen uns einmal einbilden, das wären Äpfel usw.

Bei solcher Abstraktionstätigkeit gehen wir nun an den dinglichen Symbolen dieselben Unterstufen durch, wie es mit den Dingen selbst geschehen ist. Also *Zählen* der Symbole mit Ortsveränderung, mit Berühren, mit Zeigen, mit dem Blick, sowie das *Abzählen* der Symbole mit Ortsveränderung. Wie nun aber für die folgenden Formen der Zahldarstellung an Dingen deren Abbilder traten, so müssen wir hier bei der Zahldarstellung die dinglichen Symbole durch Flächen- und Liniensymbole ersetzen: durch Ringe die Kugeln, Perlen, Spielmarken, Linsen und damit Früchte, Geld und was sonst unter ihnen gedacht war; durch Striche die Stäbchen und damit Schiffe, Soldaten, Fahnen, Gewehre, Peitschen, Laternen, Bäume und was sonst durch eine bevorzugte Ausdehnung diesem Liniensymbol näher tritt als jenem. Auch hier ist der leise Fortschritt in der Abstraktion deutlich zu erkennen, wenn man diese Übungen mit den entsprechenden der vorigen Stufe vergleicht: dort wurden 4 Pfefferkuchenherzen gemalt ♡♡♡♡, hier können dieselben Pfefferkuchenherzen durch Striche |||| vertreten werden. Wichtig ist dabei, daß diese Abstraktion vorsichtig, langsam erfolgt, mit öfterer Rückkehr zu den Dingen selbst; und der größte Irrtum dabei wäre, man könne eine solche Abstraktion in einer Woche oder gar in einer Lektion erledigen. Monatelang wollen solche Übungen vorgenommen werden, oder es ist wenigstens bei Bedarf

[1]) Womit natürlich nicht gesagt sein soll, daß dies geschehen müßte.

zu ihnen zurückzukehren. Und das Zahlbild der 4, 8 oder 13 Dinge [1]) soll in unaufhörlichem Wechsel der Gegenstände den Kindern als das eben in diesem Wechsel Bleibende nach und nach zum Bewußtsein kommen.

Es ist nicht leicht, bis zu den Tiefen dieses psychischen Geschehens vorzudringen. Dies ist aber nötig, wenn die Frage beantwortet werden soll, was denn nun eigentlich das Bleibende ist, wenn wir von den verschiedenen Dingen absehen. Es ist, wie wir schon ausführten, die Tatsache, daß von psychischen Erlebnissen uns Gleichartigkeit und Zusammengehörigkeit bewußt werden. Wollen wir uns davon aber eine Vorstellung machen — und das ist bei einem derartig komplizierten Erscheinungsbegriff nötig —, so gelingt das nur dadurch, daß wir die erlebte Zeitreihe in eine anfangs handgreifliche, später schwächere, endlich kaum mehr bemerkbare und merkmalsarme Raumreihe umsetzen, so daß wir in der Lage sind, uns 4 Dinge etwa so vorzustellen. Wir sagen, indem wir unsere Aufmerksamkeit einem bestimmten Orte im Raume zuwenden, „etwas", und indem wir die Blicklinie unserer Aufmerksamkeit etwas seitwärts, meist nach rechts, gleiten lassen, „und etwas", und wiederholen mit denselben Begleiterscheinungen: „und etwas", „und etwas". Wird dann von uns die Vorstellung 8 verlangt, so ist sie doppelt so lang als die vorige Raumreihe, die der 12 ist dreimal so lang; bei 120 schrumpft der Maßstab zusammen, vielleicht auf ein Zehntel der vorigen Größe.

Mir selbst erscheinen die Zahlen vielfach als mehr oder weniger deutliche bandartige Strecken, und zwar je nach den in Betracht kommenden Größen — wie schon angedeutet — in verschiedenem Maßstabe, jedenfalls aber so, daß ich sie mit einem Blicke übersehen zu können meine. Multiplikationsaufgaben erscheinen demgemäß oft als Flächen. Die Zahlen des ersten Hunderters treten auch auf in der Form regelmäßiger Anordnungen von „Punkten" (undeutlich markierten Kreisflächen). Nun ist es wohl möglich und sogar wahrscheinlich, daß in diesem letzteren Falle gewisse, später noch zu besprechende Übungen von Einfluß gewesen sind. Aber die vorhin erwähnte Streckenvorstellung kann ich in meiner Erinnerung bis weit vor jene Übung zurückverfolgen.

Andere sehen die Zahlenreihe bis zu einer gewissen Höhe vor sich als eine Reihe nebeneinander schwebender körperlicher Objekte [2]). Die meisten allerdings stellen sich die Zahlgrößen

[1]) Womit an dieser Stelle nicht etwa Zahlbilder wie die von Lay oder Beetz gemeint sind.

[2]) Vergl. Meyer, Zur Psychologie des kleinen Einmaleins. Zeitschrift für pädagogische Psychologie, 1913, Nr. 4.

unter dem Bilde der Ziffern vor, und zwar nicht nur bei größeren, sondern auch schon bei kleineren Zahlen. Daß hierbei das in unsern Schulen herrschende schriftliche Rechnen von entscheidendem Einfluß ist, wage ich nicht zu behaupten, ich vermute es aber.

Ob weiter auch rein akustische Zahlvorstellungen in Betracht kommen, habe ich noch nicht feststellen können. Gemischte Typen, d. h. solche, die in dem einen Falle mehr optisch, in einem anderen mehr akustisch vorstellen, dürften in größerer Zahl vorhanden sein. Größere Zahlen, d. h. fünf- und mehrstellige (z. B. die ersten 19 Dezimalstellen von π) stelle ich selbst nicht mehr optisch, sondern akustisch, und zwar rhythmisiert vor, wobei ich anzunehmen geneigt bin, daß motorische Elemente dabei stark wirksam sind.

Wer auf diesem Gebiete zum rechten Verständnis gelangen will, kann das eigentlich nur erreichen auf Grund eigener Beobachtung an den Kindern und an sich selbst. Diese Beobachtungen sind nicht nur vielfältig zu wiederholen, sondern müssen ganz besonders auch den Blick richten auf etwaige Suggestion und Übung. Die Selbstbeobachtung könnte sich fragen: Wie stelle ich mir die Geschichtszahlen vor, die ich sicher beherrsche? Wie Telephonnummern (bes. 5stellige), die ich auswendig weiß und ohne Nachdenken und Nachsehen in den Hörer rufe; wie ferner statistische Zahlen, z. B. die Einwohnerzahlen größerer Städte usw.; endlich wie Zahlen innerhalb des ersten Hunderters? Sodann: wechselt die Art meines Vorstellens innerhalb der gleichen Gruppe? Sind in diesem Falle Gründe für den Wechsel erkennbar? Wodurch könnte allgemein die Art meiner Zahlvorstellung bedingt sein? usf.

Eine ganz ähnliche Vorstellung ist es nun, die die Kinder gewinnen bei unsern Übungen, nur daß eben die kindliche Raumvorstellung nicht gar so merkmalsarm ist wie die unsrige. Beim Kinde erscheinen die Einheiten rund oder eckig, kurz oder lang, weiß oder farbig. Hier würde nun der Theoretiker der alten Schule fortsetzen: „Und um der Förderung der Abstraktion willen wollen wir die Kinder rasch über die Einheiten hinweggleiten lassen, damit ihnen die Qualität ihrer Vorstellungen gar nicht erst zum Bewußtsein kommt.“ Das ist zwar gut gemeint, aber doch nicht richtig und zweckmäßig. Denn wir brauchen die Abstraktion, die zur rechten Zeit ganz allein eintritt, weil sie eine Erleichterung der Geistesarbeit bedeutet, durchaus nicht gewaltsam zu beschleunigen. Reizvoll und für die weiteren Fortschritte den Weg weisend ist es vielmehr, gelegentlich die Kinder zu veranlassen, die Merkmale dieser ihrer Raumvorstellungen anzugeben: 6! Wer sieht etwas vor sich? Wenn

jetzt durchgängig bestimmte Dinge genannt werden, so ist diese Stufe noch nicht erreicht; dann begnügt man sich eben mit der Einsicht dieser Tatsache, wartet einige Zeit, einige Wochen meistens, und führt die sonstigen Übungen weiter. Werden bei einem späteren Versuche Körper- oder Flächensymbole genannt, so mag man sich nach der Größe und Farbe dieser Vorstellungen erkundigen. Ja, man kann suggerieren: Ich stelle mir lauter weiße Kugeln vor! Die Kinder behaupten sofort, das auch zu können. Dann werden unsere vorgestellten 8 Kugeln rot oder grün, nehmen an Größe zu oder ab, und die Kinder gehen leicht mit. Endlich kann der Versuch gewagt werden: Meine Kugeln haben gar keine Farbe . . . aber mit größter Vorsicht und ohne jedes Nötigen und Erklären. Doch mag ab und zu ein gut begabtes Kind letzteres wohl wünschen.

Was ist damit erreicht? Es sind die weiteren Unterstufen der Zahlauffassung und Zahldarstellung, Stufen, auf denen wir die Zahl vertreten lassen in der Vorstellung durch Symbole, die nicht einmal mehr den dinglichen Charakter des direkten Eindrucks haben, sondern die wir nur durch Handbewegungen andeuten, und bei denen wir soweit kommen, endlich auch diese Andeutungen zu unterlassen, so daß die Zahlbegriffe nur mehr als merkmalsarme, um nicht zu sagen qualitätlose Raumvorstellungen erscheinen.

Blicken wir zurück! Wir haben versucht, das Lehrverfahren auf einem ganz eng umgrenzten Gebiete darzustellen. Es sind nur Andeutungen gewesen, die aber jeder interessierte Pädagog sofort in Leben und Praxis umsetzen kann. Sie betrafen die Zahlauffassung und Zahldarstellung an Dingen und Symbolen mittels des Zählens.

Nun könnte man freilich meinen, hier sei uns ein nicht unerhebliches Versäumnis unterlaufen. Denn das wichtigste Symbol der Zahl, die Ziffer, sei ja mit keinem Worte erwähnt. Das ist aber mit Absicht geschehen. Die Bedeutung der Ziffer und der rechte Ort ihres Erscheinens soll noch für sich betrachtet werden. Hier nur so viel, daß alle unsere Mühe vergeblich gewesen wäre, daß es alle unsere bisherigen Erfolge über den Haufen werfen würde, wollten wir hier die Ziffer als Zahlsymbol einführen. Es bedarf einer langen Zeit, ehe der kindliche Geist sich des Bewußtseins der besonderen Vielheit jeder einzelnen Zahl bemächtigt. Dabei ist das Zahlwort schon das Band, das sich um die Menge der Einzeldinge schlingt. Die Ziffer ist aber nicht ein Symbol für die Zahl, sondern ein Symbol für das Zahlwort. Wer die Ziffer hier hereinbringt, würde zwei verschiedene Abstraktionsschwierigkeiten, und zwar Symbolisierungen verschiedenen Grades, den Kindern auf einmal zumuten, und dazu noch Kindern, die an sich kaum zu den allerleichtesten und einfachsten Abstraktionen fähig sind; Abstraktionsschwierigkeiten

überdies, die infolge des Gleichklangs der lautlichen Bezeichnungen und infolge der Ähnlichkeit ihres Wesens augenscheinlich noch nicht einmal von allen Erwachsenen bewältigt werden, die in Betracht kommen können[1]).

Nachdem dies Ziel — die Zahlauffassung und Zahldarstellung an Dingen und Symbolen mittels des Zählens — im allgemeinen erreicht ist, kann langsam, tastend, mit öfterem Zurückgreifen die zweite Gruppe dieser Übungen in Angriff genommen werden, die Zahlauffassung und Zahldarstellung an Dingen und Symbolen **im rhythmisierten Zählen.** Zweierlei Erfahrungen mögen dahin führen — auch die Kinder. Zunächst die, daß bei größeren Zahlen, bei 30, 40, 50 und mehr Einzeldingen, die Zählung unsicher wird: die einzelnen Kinder, die da versuchen, „mit den Augen" zu zählen, bekommen verschiedene Ergebnisse heraus. Und dann die andere Erfahrung, daß es doch ziemlich langsam geht, daß es lange dauert, bis man fertig wird, ja daß infolgedessen der Fall eintreten kann, daß man vergessen hat, wo man im Augenblicke war usw. Dies führt notwendigerweise zur Gliederung, und zwar zur gleichmäßigen Gliederung, zum Rhythmus. Das rhythmische Zählen kommt zum Ausdruck durch abwechselndes lautes und leises Aussprechen der betreffenden Zahl. Es bestehen dabei verschiedene Möglichkeiten der Betonung. Bei der Zweiergliederung kann man die ungeraden betonen: **eins,** zwei **drei,** vier **fünf,** sechs . . oder die geraden: eins, **zwei,** drei, **vier,** fünf, **sechs** . . . Und bei den übrigen Rhythmen ist es entsprechend. Auch ist leicht zu erkennen, daß keine dieser Möglichkeiten von den Übungen wegzufallen braucht, weil sie unzweckmäßig wäre. Dennoch hat die zweite Form vor der ersten einen ganz wesentlichen Vorzug darin, daß ihre Akzente den späteren Einmaleinsreihen entsprechen und sie in trefflicher Weise vorbereiten. In Dreierrhythmen würde also zu zählen sein: 1, 2, **3,** 4, 5, **6,** 7, 8, **9** usw.

Zur Zweier- und Dreiergliederung tritt noch in unsern Übungen die Vierer- und Fünfergliederung hinzu. Andere kommen nicht in Betracht. Denn die Sechsergliederung wäre nur eine Wiederholung der Dreiergliederung, und höhere zu verwenden widerspricht dem Umfang der Aufmerksamkeit.

Von diesen Gliederungen beanspruchen zwei unsere Aufmerksamkeit in besonderem Maße, die der Zwei und der Fünf, die

[1]) Ich bekam einst einen achtjährigen Knaben, der regelmäßig im Rechnen versagte. Bei der Aufgabe 3 · 8 frug ich ihn: Wie stellst du dir acht vor? Da malte er die Ziffer 8 in die Luft. Da wußte ich genug, begann mit ihm jene Zahlauffassungs- und Zahldarstellungsübungen und hatte die Freude, ihn nach einem halben Jahre zu den guten Rechnern der Klasse zählen zu können. Die Umgewöhnung eines unrichtig gewöhnten Kindes ist allerdings keine leichte Arbeit.

kleinste Mehrheit, die es gibt, und die größte, die wir unmittelbar aufzufassen vermögen. Zu diesen psychologischen Gründen tritt noch der entwicklungsgeschichtliche, daß sie die Faktoren sind, auf denen unser Dezimalsystem sich aufbaut, und damit die didaktische Folgerung, daß es zweckmäßig sein wird, die Einführung ins System in dieser von der Natur gewiesenen Weise vorzubereiten. Hätten wir ein mathematisches Duodezimalsystem ausgebildet, so würde selbstverständlich die Dreier- und Vierergliederung die höhere Bedeutung haben. Aber vielleicht sind auch jene psychologischen Motive mitwirkend gewesen dafür, daß das Dezimalsystem das schon bis zu einem nicht geringen Grade der Entwicklung gelangte Duodezimalsystem unterdrückt hat.

Die brauchbaren Rhythmen unterscheiden sich voneinander in methodischer Hinsicht durch die Schwierigkeit ihrer Erwerbung und Sicherung. Sie verlangen infolgedessen auch eine andere Behandlung. Die Zweiergliederung fällt dem Kinde am leichtesten, weil sie zunächst im langsamen $^2/_8$ Takte des Kinderliedes mit Auftakt einherschreitet:

1 2 3 4 5 6 7 8

Die Dreiergliederung erfolgt am besten im $^4/_8$ Takte mit je einer Pause nach den einzelnen Rhythmen:

1 2 3 – 4 5 6 – 7 8 9 –

Bei der Vierergliederung steigern sich die Anforderungen. Man beginnt sie daher zweckmäßig im $^6/_8$ Takte mit den entsprechenden Atem- und Überlegungspausen:

1 2 3 4 – – 5 6 7 8 – – 9 10 11 12 – –

Der Fünfergliederung endlich als der verhältnismäßig schwierigsten entspricht die folgende Form:

1 2 3 4 5 – – – 6 7 8 9 10 – – – 11 12 13 14 15 – – –

Selbstverständlich wollen diese Angaben nur Hilfen, Annäherungswerte sein, die auch stärkere Abweichungen vertragen. Was sie hauptsächlich zeigen wollen, ist, daß wir neben der Betonung zum Abgrenzen der Rhythmen mit gutem Erfolg das **Pausieren** verwenden können. Beides mag entsprechend stark auftreten, so daß

der Charakter des Zeitrhythmus in die Gehörs- und Bewegungsvorstellungen eingeht. Aber man soll hier nicht etwa die Kinder quälen wollen mit Selbstfinden. Öfteres Vormachen ist hier das Mittel, welches am raschesten zum Ziele führt.

Sodann sei darauf hingewiesen, daß das Sprechen der unbetonten Zahlenwerte nach und nach immer leiser vorgenommen wird, bis es — das wird als besondere Leistung betrachtet — zuletzt von einzelnen lediglich durch Lippenbewegungen ersetzt und angedeutet wird.

Diese Übungen werden nun längere Zeit hindurch fortgesetzt. Sie beziehen sich wiederum auf die Dinge selbst, die ebensogut und so oft gezählt werden, wie wir es S. 157 angedeutet haben, nun aber nur noch rhythmisch: Zähle die Kinder in Zweiern! Zähle die Kastanien hier in Dreiern! Die Soldaten in Vierern, die Pfennige in Fünfern! Es werden dabei die Schwierigkeitsstufen „mit Rücken, mit Tippen, mit Zeigen, bloß mit den Augen" verwendet, und neben den Dingen selbst werden ihre dinglichen Zahlsymbole gezählt. Die Übungen beziehen sich wie die vorigen nicht nur auf die Zahlauffassung, sondern auch auf die Zahldarstellung. Sie führt wieder einen Schritt weiter, indem sie der bisher in der Hauptsache zeitlichen Rhythmisierung die räumliche zugesellt durch entsprechendes Legen und Zeichnen der Dinge und Symbole. 9 Stäbchen werden nun nicht mehr so gelegt: |||||||||, sondern in

„Zweiern": || || || || | oder in „Dreiern": ||| ||| |||

oder in „Vierern": |||| |||| | oder in „Fünfern": ||||| ||||

15 Perlen nicht mehr so: OOOOOOOOOOOOOOO

sondern in Zweiergliederung: OO OO OO OO OO OO OO O

oder in den übrigen Formen: OOO OOO OOO OOO OOO

oder OOOO OOOO OOOO OOO

oder OOOOO OOOOO OOOOO.

Und wenn statt Stäbchen und Perlen Striche und Ringe gemalt werden, ist's auch so[1]). Selbst beim bloßen Vorstellen von Zahlgrößen (von Zahlsymbolen) ohne wirkliche dingliche Hilfsmittel

[1]) Das Dargestellte wird, wenn irgend möglich, rhythmisch zählend nachgeprüft.

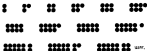
wirken Betonung, Pausen, Zählbewegungen einer Hand und Ausmaß der räumlichen Rhythmen mit beiden Händen noch lange Zeit mit. Daß diese Übungen nicht langweilig sein müssen, sondern gefühlsbetont gestaltet werden können, das brauchen wir dem Elementarlehrer nicht erst zu begründen und zu zeigen. Eine Gefühlsbetonung ist ja schon in hohem Maße vorhanden, wenn ein Kind zur nächsten Schwierigkeitsstufe zugelassen wird. Brauchen wir so die Intelligenteren nicht aufzuhalten, so haben wir doch andrerseits die tröstliche Gewißheit, daß die Schwächeren gar nicht sämtliche Schwierigkeitsstufen durchzumachen nötig haben und trotzdem in einigermaßen ausreichender Weise ihre Zahlbegriffe entwickeln.

Angesichts der Darstellung größerer Zahlen, die durchaus nicht unterbleiben darf und bei welcher dem Kinde die Grenzen nur durch sein eigenes Können gesteckt werden, fühlen die Kinder den Fortschritt zur nächsten Übungsgruppe als dringendes Bedürfnis. 30 oder 40, selbst in irgendeiner Rhythmisierung, ist eine sehr lange Reihe. Das Prinzip der *linearen Reihung* aber steht — selbst wenn der Rhythmus hinzutritt — dem Wunsche nach immer schnellerer Auffassung entgegen. Die Zahlauffassung durch *bloßes Überblicken* erscheint als neues Ziel, und eine *mehrgliedrige Reihung* als das Mittel, es zu erreichen.

Damit gelangen wir ins Gebiet der *Zahlbilder*. Es soll hier nicht eingegangen werden auf die verschiedenen Formen und Autoren von Zahlbildern sowie auf die Grundsätze ihres Aufbaues. Wer sich dafür weitergehend interessiert, kann es in den üblichen Rechenmethodikbüchern nachlesen. Zudem hat uns die Erfahrung gelehrt, daß keine Form der von uns versuchten Zahlbilder unbrauchbar gewesen wäre, und sogar auch dies, daß ein gelinder Wechsel der Zahlbilder gar nicht etwa ungünstig wirkt. Es leuchtet das schon ein, wenn man es praktisch an sich selbst ausprobiert. Ob die 8 in Zweiergliederung oder in Dreiergliederung erscheint oder in Vierergliederung: oder vielleicht in Fünfergliederung: oder so: oder so: also in der Form der vom Dominospiel her bekannten und anderer symmetrischer Zahlbilder, sie soll überall von dem Kinde eben als 8 erkannt

werden. An diesem Versuche aber zeigt sich noch aufs deutlichste, daß wir keineswegs beabsichtigen, eine Raumvorstellung — eine bestimmte geometrische Figur — an Stelle der Einheitensumme zu setzen, wie es manche Methodiker von den Zahlbildern behaupten. Sondern daß die Benutzung der Zahlbilder, wie sie hier vorgeschlagen wird, zunächst nur den Zweck hat, das Zählen zu mechanisieren, fast möchten wir sagen: zu automatisieren in dem Sinne, daß es immer schneller — zuletzt fast momentan — sicherer und mit immer geringerem Kraftaufwand verläuft [1]).

Hat uns bisher die Erfahrung gelehrt, daß die Gestalt der Zahlbilder nicht die große Bedeutung hat, die ihr von manchem Zahlbilderfinder zugeschrieben wird, so läßt sich doch nicht verkennen, daß eine von diesen Zahlbildergruppen gewisse Vorzüge hat, die man nicht ohne Not aus der Hand geben sollte. Es sind dies die Bornschen Zahlbilder. Sie sehen so aus:

usw.

Man sieht zunächst, daß ihr Aufbau bestimmt wird von denselben psychologischen Gesetzen, die uns veranlaßten, der Zweier- und der Fünfergliederung im rhythmisierten Zählen unsere besondere Aufmerksamkeit zu widmen: jener als kleinster Mehrheit, dieser als derjenigen Mehrheit, die gerade noch überblickbar ist [2]). Interessant ist, daß mit dieser psychologischen Folgerung der rein experimentell

[1]) Wollte man die Zahlbilder anwenden, ohne daß sie wiederholt ausgezählt würden, so wäre allerdings zu befürchten, daß die Figur mit dem Worte sich assoziierte als aufgenommene, nicht aber als erarbeitete Abstraktion. Andrerseits sei solchen gegenüber, die in dem Irrtum leben, es müßten „reine Zahlbegriffe" gewonnen werden, die Zahlbilder müßten erst wieder vergessen werden, darauf hingewiesen, daß die Fähigkeit des mathematischen Denkens sich ohne Raumvorstellungen gar nicht entwickeln kann, daß wir auch beim Zahlvorstellen durchaus an räumliche Schemata gebunden sind (Brandenberger, Zahlauffassung beim Schulkinde. Leipzig, 1914, S. 18), daß die Abstraktion langsam reift und zum „reinen Begriff" erst in einem späteren Alter führt.

[2]) Die Mehrheit fünf läßt sich auch in linearer Reihung momentan noch ganz gut erfassen, wenn wir uns eingeübt haben, den Blick gleich anfangs der ganzen Gruppe zuzuwenden, d. h. auf die Mitte zu richten. Man versuche es selbst mit folgender Anordnung: ○○○○○ und stelle daneben 4, 6 und andere.

gewonnene Befund übereinstimmt[1]). Dazu enthält diese Anordnung restlos auch die Vierergruppierung, und selbst die Dreiergliederung macht nicht erhebliche Schwierigkeiten, wie wir später noch zeigen werden. Ein weiterer Vorzug dieser Aufbauform ist, daß jedes Zahlbild die vorhergehenden in gleicher Form in sich schließt; der wichtigste aber ist der, daß das Aufbaumotiv 2·5 aufs beste die Einführung ins Dezimalsystem in sich schließt und damit vorbereitet. Wir geben gern zu, daß andere Zahlbilderformen auch ihre Vorzüge haben — so leisten manche der Dreiergliederung wertvolle Dienste — aber keine der anderen Formen kann auch noch den dezimalen Aufbau des Systems darstellen. Man kann darum die Bornsche Anordnung geradezu als dezimale Zahlbilderform bezeichnen. Zunächst ist es möglich, nicht nur den Zehner als eine Einheit zu erfassen, sondern auch in solcher Weise mehrere Zehner ohne Schwierigkeit oder nach ganz kurzer Übung zu überblicken. So entstehen, was selbst von den Vertretern der Zahlbildermethode bisher niemand gewagt hat, Zahlbilder wie die folgenden:

Durch das immer wiederkehrende Aufbaumotiv 2·5 ist es möglich, mit einem Blicke sogar den Hunderter als Einheit zu erfassen. Es wird dem Eingeweihten nicht schwer sein, zu erkennen, welch außerordentlich wertvolles Lehrmittel damit zur Verfügung steht.

Wesentlich ist dabei ferner, daß wir selbstverständlich nicht angewiesen sind auf die Zahlbilder der höheren Einheiten, auf ganze Zehner etwa, sondern daß wir in der Lage sind, jedes beliebige Zahlbild bis zur Hundert darzustellen. Das Zahlbild der 94 z. B. gestaltet sich so:

[1]) Frank Freeman zeigt (Untersuchungen über den Aufmerksamkeitsumfang und die Zahlauffassung bei Kindern und Erwachsenen. Leipzig 1910, S. 97), daß

Es wird dem Leser nicht schwer fallen, auch folgende Zahlbilder rasch zu überblicken:

Wie sind die Übungen im Zahlauffassen und Zahldarstellen mit raschem Überblicken nun zu gestalten? Für die

die Bornsche Anordnung unter sechs verschiedenen Anordnungen die günstigsten Ergebnisse hatte.

Zahlauffassung hat es sich recht bewährt, wenn man die Zahlbilder auf **Anschauungstafeln** zeigen kann, deren Ausmaße so groß sind, daß das einzelne Zahlbild auch noch von den weiter weg sitzenden Kindern erkannt wird. Wir haben solche Anschauungstafeln mit Hilfe von älteren Schülern hergestellt. Auf Papptafeln von 35 · 42 cm Größe wurden die Zahlbilder von 5 bis 100 aufgezeichnet. Dabei konnte die Rückseite für ein zweites Zahlbild verwendet werden, so daß im ganzen 48 Tafeln sich nötig machten. Die schwarzen „Punkte" bekamen 25 mm Durchmesser, diese Größe erwies sich als völlig ausreichend; Versuche mit kleineren Kreisflächen befriedigten weniger. Der vom Zahlbild nicht beanspruchte untere Raum wurde frei gelassen[1].

Diese großen Anschauungstafeln dienen zunächst nur der gemeinsamen Anregung. Sie geschieht in der Form der tachistoskopischen Leseversuche mit der anfänglichen Aufforderung: Ratet[2]), wieviel Punkte ich euch zeige! Wir haben dabei den ganzen Stoß Tafeln vor uns in wagerechter Lage auf dem Pulte liegen. Der untere Rand der Zahlbilder liegt nach den Kindern zu. Wir kippen nun das oberste Blatt rasch in senkrechte Stellung, so daß es alle Kinder sehen können und legen es nach wenigen Sekunden seitwärts „aufs Gesicht". Nun sprechen die Kinder aus, was sie gesehen haben. Inzwischen haben wir schon das nächste Blatt ergriffen, behandeln es gerade so, legen es aber nicht auf das erste, sondern daneben. Das dritte Blatt legen wir wieder auf das erste, das vierte auf das zweite; dadurch entstehen zwei abgelegte Stöße, und die Reihenfolge der Darbietungen kann nie dieselbe bleiben. Beide werden aufeinander gelegt, und die Übung kann fortgesetzt werden mit den Zahlbildern der bisherigen Rückseiten.

Diese Zahlauffassungsübungen verbrauchen sehr wenig Zeit[3]). Auch ist es gerade deswegen mit möglich, die ganze Klasse daran teilnehmen zu lassen. Natürlich empfiehlt es sich hierbei nicht, zu

[1]) Diese Tafeln kann man sich selbst herstellen, wenn man über die nötige Zeit verfügt und die nötigen Hilfskräfte zur Hand hat. Denn es sind nicht weniger als 48 · 105 = 5040 „Punkte" mit Zirkel und Tuschpinsel herzustellen. Die Pappen wird man das Stück je nach Stärke zu 4—10 Pf. erhalten können. Auf meinen besonderen Wunsch hat sich daher der Verlag bereit erklärt, diese Pappen zu drucken. Durch Ausnutzung aller Möglichkeiten ist er in der Lage, den ganzen Satz von 48 Stück für 5 M. abzugeben.

[2]) Das ist selbstverständlich nur ein kindlicher Ausdruck. Wir sind Feinde jeglichen Ratens im Rechnen, d. h. wir dulden nie, daß ein Kind eine Zahl herausgreift ohne sinnliche oder überlegende Grundlage.

[3]) Letzthin wurde von Anwesenden festgestellt, daß 45 Aufgaben in 145 Sekunden gelöst worden waren. Ich hatte dabei den Eindruck gehabt, daß es nicht besonders schnell gegangen war.

warten und melden der Kinder zu verlangen. Wir veranstalten es gewöhnlich so, daß zwei, drei oder vier Kinder um die Wette die Zahlgrößen schnell zu erkennen suchen. Alle anderen geben acht, weil sie feststellen wollen, wer von den Wettläufern am flinksten gewesen sei, Richtigkeit vorausgesetzt. Nach 10 oder mehr Aufgaben wechseln die Rollen, andere kommen dran. Auch bei schwachen Kindern hat sich das Verfahren als recht erfolgreich erwiesen.

Man wird einwenden: Das ist ja eigentlich nur ein Schätzen, zumal, wenn es so rasch gehen soll. Wir geben das zu, aber nur für den Anfang. Denn hier genügt es uns völlig, wenn die Kinder angeben können: es waren fast 80, es waren reichlich 60, es fehlten einige an 40, es waren ungefähr 50. Es ist uns nicht nur für die Erkenntnis der psychologischen Lage wie das entsprechenden Lehrverfahrens wertvoll, sondern es ist uns durchaus erwünscht, wenn die Kinder ihre Aufmerksamkeit erst der Gesamtsumme zuwenden lernen. Es ist uns lieber, sie sagen einmal 66 statt 68, als 48 statt 68. Bei solchen Fehlern, wie auch bei Zweifelsfällen, wird das Blatt nochmals aufgerichtet und — ausgezählt; es bleibt kein anderer Weg übrig. Nur geht dies nachprüfende Auszählen außerordentlich schnell. Wir können uns nicht mehr erinnern, daß es nötig gewesen wäre, im Anschluß an solche Auffassungsübungen die gesamte Zahlreihe zum Auszählen zu benutzen. Nach sehr kurzer Übung zählten die Kinder die Zehner, nein besser, sie überblickten die Zehner, und das „nachprüfende Auszählen" dauert später so etwa 2 Sekunden. — Übrigens ist an der ganzen Übung die Vorbereitung für die Einführung ins System deutlich zu erkennen.

Selbstverständlich dienen diese Anschauungstafeln zunächst dem einen Zwecke der Zahlauffassung im Überblicken. Die **Zahldarstellung** an solchen Anschauungsmitteln verursacht zuviel Zeitaufwand, z. B. wenn man die Kinder ein verlangtes Zahlbild heraussuchen lassen wollte. Dies kommt also nicht in Betracht. Es ist ja mit fast allen sogenannten Anschauungsmitteln auch so. Soll ein Kind an einem Anschauungsobjekt irgend etwas vornehmen, so schauen 39 andere zu; 78 Hände, die das gleiche tun könnten, sind zum Nichtstun verurteilt. Bei der Zahldarstellung müssen wir aber, wie bei jeglicher anderen Art von Darstellung, alle Kinder zugleich beschäftigen können, und das geht nur, wenn das Lehrmittel in den Händen aller ist. Dies bedingt natürlich eine handliche kleinere Form. Wir haben nun die Zahlbildertafeln in der verschiedensten Weise angefertigt, um den Kindern das eigene Mittun zu ermöglichen. Sehr wirksam erschienen sie auf Packpapier in zwei Farben. Mittels eines Locheisens haben wir viele Tausende

von Blättchen (von etwa 9 mm Größe) aus farbigem Papier ausgeschlagen. Die Kinder benutzten nun auch alte Schreibebuchumschläge und klebten auf die dunkelblauen die leuchtenden hellen Farben, auf hellgraues Packpapier oder gewöhnliches weißes die satten und dunkleren Farben, abwechselnd in den Zehnerbildern, wie hier durch Ringel und Vollfläche angedeutet ist.

○○○○○ ●●●●●
○○○○○ ●●●●●

●●●●● ○○○○○
●●●●● ○○○○○

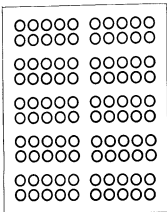
○○○○○ ●●●●●
○○○○○ ●●●●●

●●●●● ○○○○○
●●●●● ○○○○○

○○○○○ ●●●●●
○○○○○ ●●●●●

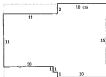
Es war das allerdings eine Arbeit, die nicht in kurzer Zeit erledigt war. Aber im Laufe mehrerer Wochen waren doch von jedem Kinde einige solcher Blätter hergestellt worden, die einen schöner, die andern minder schön. Man kann es versuchen lassen und wird gewiß seine Freude daran haben, wenn auch nicht an allen. Denn das Auge und die Handgeschicklichkeit vieler Kinder sind eben noch nicht soweit entwickelt. Zwar ist die Hauptsache dabei, daß die Kinder den Zahlenraum bis 100 gefühlsbetont, langsam und wiederholt erleben, und dies ist jedenfalls erreicht worden. Doch waren Blätter dabei, welche zu große oder zu kleine oder verschiedene Abstände zeigten, und solche, bei denen die Reihen schief oder nicht geradlinig geraten waren. Dies ist aber weder vom ästhetischen Standpunkte gutzuheißen, noch entspricht es dem Geiste des mathematischen Aufbaues. Diese Erfahrung führte uns auf den Gedanken, für den Gebrauch der Kinder die Hundertertafel drucken zu lassen, genau in der Größe, wie sie auf der folgenden Seite zu sehen ist.

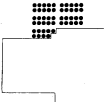
Damit wollen wir dem Kinde die schwierige und zeitraubende Arbeit der geradlinigen Einordnung in den Raum — mit besonderer Berücksichtigung engerer und weiterer, aber unter sich gleicher Abstände — abnehmen, nicht aber die leichtere und für die mathematische Bildung allein in Betracht kommende Arbeit des Auszählens und Auswählens. Zu diesem Zwecke haben wir die „Punkte" durch Ringe ersetzt. Nun kann das Kind eine solche Tafel in die Hand bekommen mit der Aufgabe, die eine Hälfte der Zehner —

immer im Wechsel — blau, die andere gelb auszumalen, genau zu zählen dabei usw. Gelingt eine Tafel nicht, so ist die Arbeit nicht

vergebens gewesen, und der Verlust ist gering[1]). Die Ringe können auch mit Tinte schwarz ausgemalt werden, ja für Auffassungs- und

[1]) Diese Tafeln können vom Verlag Julius Klinkhardt, Leipzig, bezogen werden, 100 Stück zu etwa 80 Pf.

Darstellungszwecke können auch die Ringe bleiben, wie sie sind. Doch wirken dunkle Farbtöne durch ihren Kontrast (vgl. S. 172).

Zur Benutzung ist noch nötig, daß jedes Kind sich ein Stück Deckpapier herstellt von folgender Form und mit den dabei stehenden Maßen:

Da dies Deckpapier nicht zu dünn sein soll, eignet sich das dicke braune Umschlagblatt eines alten Heftes recht gut dazu. Mit wenigen Scherenschnitten können die Kinder es sich zurecht machen.

Die Übungen im Zahldarstellen gestalten sich nun mit diesem Hilfsmittel wie folgt. Man kündigt an: Wer kann auf seinem Hundertblatt recht schnell 60 zeigen? Das übrige decken wir zu. Aus den beiden folgenden Bildern ist ohne weiteres ersichtlich, in welcher Weise das Deckblatt zu benutzen ist.

Gerade Zahlen werden mit dem einmal abgesetzten oberen Rande (Bild von S. 177) gezeigt, bei ungeraden dreht man das Blatt um seine wagerechte Längsachse und zeigt mit dem nunmehr oberen, zweimal abgesetzten Rande. „Handgreiflich" lernen die Kinder gerade und ungerade Zahlen beachten. Es braucht wohl nicht weiter ausgeführt zu werden, wie nun in kürzester Zeit eine Fülle von Zahldarstellungsübungen bewältigt werden kann, wie dabei alle Kinder tätig sind, wie der Lehrer nur die Zahlen zu nennen braucht und dann einen prüfenden Blick über die Klasse wirft, wie aber auch jedes Kind sich und des Nachbars Leistung dieser Nachprüfung unterzieht, wie weiter auch das Aufgabenstellen in die Hände der Kinder gelegt werden kann, wie diese Übungen gruppenweise oder paarweise fortgesetzt werden können, so daß ein Kind die Aufgabe stellt, das andere sie ausführt. Nachprüfung im rhythmisierten Auszählen ermöglicht die sofortige Kontrolle, die in jedes Kindes eigenstem Interesse liegt.

Wenn die Technik dieser Darstellungsübungen geläufig ist, lassen sich diese in den Händen der Kinder befindlichen Blätter auch für Zahlauffassungsübungen gut verwenden; freilich nicht so, daß alle die gleiche Aufgabe bekämen — das geschieht besser mit den großen Tafeln —, sondern so, daß die Kinder paarweise arbeiten: ein Kind deckt eine gewählte Zahl ab, und sein Nachbar sucht sie rasch zu erkennen. Nach einer Reihe von Aufgaben werden die Rollen gewechselt.

Solche Auffassungs- und Darstellungsübungen lösen einen fröhlichen Wetteifer aus. Hierbei finden übrigens die Kinder selbst die

Schwächeren und Langsamen heraus, deren man sich helfend, forschend und beobachtend annehmen kann. Solche Übungen sind wertvoller als geistloses Auswendiglernen von Worten ohne sinnlichen Hintergrund, selbst wenn man vorher mehrere Male „die Anschauung" „dargeboten" hätte.

Auch die russische Rechenmaschine läßt sich für diesen Zweck herrichten. Ihre Zählkörper erscheinen gewöhnlich in zwei Farben, allerdings in Zehnerlinien. Man hat dann nur nötig, die Stäbe herauszuziehen und die Farben so zusammenzustellen, daß die einzelnen Zehnerbilder (5·2) sich voneinander durch die Farben abheben, so wie es das Bild auf S. 175 andeutet. Dann können diese Auffassungs- und Darstellungsübungen auch an ihr vorgenommen werden. Sie kann dann bis zu einem gewissen Grade die oben beschriebenen Papptafeln ersetzen. Die Schnelligkeit der Darbietung bleibt begreiflicherweise weit hinter der der Anschauungstafeln zurück. Und darauf kommt es doch wesentlich an. Aber wie gesagt, im Notfalle geht es auch so. Das Lehrmittel in der Hand der Kinder kann sie allerdings in keiner Weise ersetzen.

Was soll nun mit diesen Übungen erzielt werden? Kurz gesagt: Die Kinder sollen Zahlgrößen auffassen und darstellen lernen. Ausführlicher: Sie sollen in eigenem Tun und Erleben nach und nach die völlig klare Bewußtheit von der Maßgröße der Zahlen sich aneignen, z. B. daß 73 viel mehr ist als 37, 64 mehr als 46, 58 nicht viel weniger als 62 usw.[1]). Sie gewinnen sie im Zählen, später im rhythmischen Zählen, und noch später im zählenden Überblicken der Dinge und Rechensymbole. Das Auffassen und Darstellen der Zahlgröße muß dabei bis zu gefühlsmäßiger Sicherheit gesteigert werden. Es wurde das schon angedeutet in dem Hinweis auf das Schätzen. Dies müssen die Kinder tatsächlich lernen, und nicht bloß als Vorstufe, sondern als gefühlsmäßige Vorausnahme des genaueren Ergebnisses. Nicht Oberflächlichkeit und Ungenauig-

[1]) Ich erinnere mich dabei lebhaft solcher Kinder, die rasch bei der Hand waren, ihre Rechenergebnisse umzustellen oder sonst zu verändern, wenn ihnen das Gesicht des Lehrers oder das Benehmen der anderen Kinder anzuzeigen schien, daß sie nicht ganz richtig gerechnet hätten. Z. B. 8·8! Kind: ist 64. Da ich aber die Stirn kraus ziehe (absichtlich, um die psychische Wirkung und das Zahlbewußtsein des Kindes zu erforschen), so folgt rasch die „Verbesserung": nein 46. Das sollte bei richtiger Behandlung überhaupt unmöglich sein. Oder ich erinnere mich des Falles: 7·30! Kind: 210. Ich, an alle gewendet: Ist das nicht zuviel? Kind sofort: 710. Man sieht hier deutlich, wie einzelne und zwar wichtige Teile dieser Assoziation im Gedächtnisse hängen geblieben sind, die 7, die 10, die 200; aber es war doch zum guten Teil ein Auswendiglernen gewesen, das ich nach allen Beobachtungen und Erfahrungen auf mangelhafte Zahlanschauung zurückführen zu sollen glaubte. Die nachträgliche Grundlegung in Auffassungs- und Darstellungsübungen hatte denn auch den gewünschten Erfolg. Doch ist es — wiederholt sei dies ausgesprochen — nicht leicht, an das Wort gewöhnte Kinder umzugewöhnen an die Vorstellung.

keit wird dadurch begünstigt, wie von ununterrichteter Seite behauptet wird, sondern die Gewissenhaftigkeit, den möglichen Fehler denkbar klein und im weiteren Verlaufe die Genauigkeit möglichst groß zu machen. Die runde Zahl, die gröbere Feststellung ist zunächst zu machen, die feineren folgen darauf[1].

Daß solches Zahlauffassen und Zahldarstellen auch eine zweckmäßige Vorbereitung für die Operationen ist, wird an der betreffenden Stelle noch näher auszuführen sein. Ein Gefühl dafür wird dem Leser schon jetzt aufgehen.

Ein wichtiger Hinweis scheint noch nötig zu sein. Mancher Lehrer kann sich einen Rechenunterricht gar nicht denken, der nicht addiert, subtrahiert usw. Das ist aber bei diesen Auffassungs- und Darstellungsübungen im Zählen und Überblicken gänzlich auszuschließen. Hier handelt es sich immer nur um die Frage: Wieviel **sind** es? nie um die: Wieviel **werden** es? In unserem üblichen Rechenunterricht zeigt sich freilich, daß die Beherrschung der Zahlauffassung und Zahldarstellung in ihrem Werden und Wirken stark unterschätzt wird. Er vernachlässigt infolgedessen ihre Herbeiführung oder glaubt sie mit der Behandlung der Operationen verbinden zu können. Wir sind der Überzeugung, daß in dieser Tatsache ein wichtiger Grund zu sehen ist für die von allen Seiten festgestellten und beklagten Mißerfolge.

§ 20. Die Einführung in das System.

Die Einführung in die Zahlenreihe ist in jeder Hinsicht grundlegend und mußte deshalb ausführlicher dargestellt werden. Mit der Einführung in das System können wir uns kürzer fassen. Damit soll freilich nicht eine Geringschätzung ausgedrückt werden. Dies wäre eine völlig falsche Auffassung, welche besonders bedauerlich wäre angesichts der Tatsache, daß unser heutiger Rechenunterricht sich dieser Aufgabe — in geeigneter Weise einzuführen ins System — nicht allenthalben bewußt ist. Es ist dringend zu wünschen, daß hier Klarheit und zielbewußtes Arbeiten einsetze.

Wer freilich meint, in das Dezimalsystem führe man die Kinder ein mit der **Bearbeitung des zweiten Zehners**, der ist im Irrtum. Und in diesem Irrtum sind, soweit wir sehen, Methodiker und Lehrpläne in erheblichem Maße befangen. Er ist dort wahrscheinlich, wo man eine gewisse abgegrenzte Zeit der Behandlung des Zahlenraumes von 10 bis 20 widmet.

Wir haben gezeigt, daß die Zahlenreihe bis 100 schon für das Kind übersichtlich gestaltet werden kann — mit der selbstverständ-

[1] Weitere Ausführungen über Schätzen bringt später ein besonderer Abschnitt.

lichen Einschränkung, daß die Klarheit der Vorstellung anfangs geringer ist und mit der Zeit immer größer wird. Aber innerlich, psychologisch ist die Zahlenreihe ein ganz anderes Ding als das Zahlensystem. Um ein Beispiel zu benutzen: Die Erwerbung der Zahlenreihe gleicht der Erscheinung, daß man Kenntnis gewinnt von dem Werdegange einer Stahlfeder vom Walzen des Stahlblechs an bis zur Verpackung. Der Beherrschung des Systems würde es dann entsprechen, wenn jemand diesen Werdegang aus seiner Kenntnis der Eigenschaften des Materials, aus seiner Kenntnis der bestmöglichen Zweckgestaltung und der Ökonomie der Herstellungsmethoden heraus eben diese Methoden beherrscht und in sie experimentierend eingreift. Das ist augenscheinlich nicht von einem zu verlangen, der — um im Bilde zu bleiben — soeben das Ausstanzen des Stahlblechs kennen gelernt hat.

Die Erweiterung der Reihe der Zahlbegriffe zum Zahlensystem bedeutet, wie schon früher gezeigt wurde, eine höhere Entwicklungsstufe. Sie bedingt, daß der Begriff der höheren Einheit erfaßt wird, und besteht in der fortschreitenden Erkenntnis des komplizierten Charakters jeder Zahl, insofern sie eben aus Einheiten verschiedenen Grades zusammengesetzt ist. Das Zahlensystem am Tillichschen Rechenkasten erläutern zu wollen, zeigt sich damit als ein Beginnen, dem der Erfolg versagt sein muß, oder dessen Erfolg nur ein Scheinerfolg sein kann in dem Sinne, daß es entweder Wortlernerei gewesen ist, was gewonnen wurde, oder daß Nebeneinflüsse tätig gewesen sind, die für den eigentlichen Erfolg die Ursache waren. Das Kind, das am Tillichschen Rechenkasten lernt und übt, hat eben begonnen, die erste Stufe der Zahlbegriffe (die erste schulmäßige, nach unserer früheren Darstellung die dritte) zu erklimmen. Da muß die nächste für es noch in weiter Ferne liegen. Dort aber, wo die Einführung in das System erfolgen kann, bedarf es des Tillichschen Rechenkastens nicht mehr.

Wenn damit in Rücksicht auf das Lehrverfahren die grundsätzliche Verschiedenheit der beiden Gebiete festgelegt ist, so ist es doch auch andrerseits selbstverständlich, daß man nicht von einem ins andere ruckweise versetzt wird, sondern daß Verbindungswege vorhanden sind, die langsam in die Höhe führen, will sagen, daß die Einführung ins System von einer Anzahl anderer Übungen schon vorbereitet wird.

Zu diesen vorbereitenden Momenten gehören in erster Linie unsere Zahlwörter. Wir müssen bedenken, daß es für die Erfassung der Zahlenreihe gar nicht in Betracht kommt, wieviel eigenartige Zahlwörter wir hätten. Bei der Masse von Vokabeln, die ein Kind in den ersten drei Lebensjahren bewältigt — oder auch ein Jüngling von 14 bis 20 — käme es in der Zeit der Aufnahme der

Zahlenreihe auf 40 oder 90 Wörter mehr wirklich nicht an. Das geschieht aber nicht; sondern mit außerordentlicher Ökonomie haben sich die deutschen Zahlwörter dem Dezimalsystem angepaßt, dergestalt, daß in jedem Zehner dieselben zehn Klänge ohne Ausnahme wiederkehren. Die Tatsache dieser natürlichen Ökonomie haben die Methodiker nun für ein Zeichen gehalten, mit den Zahlwörtern das System zu geben. Sie haben dabei das Wortsymbol mit der dadurch bezeichneten Sache verwechselt.

Einem Photographiebeflissenen kann das Wort Paramidophenol ganz geläufig sein, ohne daß er die Konstitution dieses Stoffes, die der Chemiker eben durch dies Wort bezeichnet, wissend beherrscht. Und Kunstwörter, wie Formalin, Forman, Formol, Formamint usw., die eine bestimmte Zusammensetzung oder einen bestimmten Herstellungsweg bezeichnen (der unter gesetzlichem Schutze stehen kann), werden von aller Welt gebraucht, während nur wenige von jenen charakteristischen Eigenheiten genauere Kenntnis haben.

Daß die Zahlwörter das System abbilden, sei uns im Rechenunterricht also eine willkommene Vorbereitung, aber keine Nötigung zur Behandlung des Systems.

Diese Behandlung haben geschickte Elementarlehrer zu erleichtern gesucht durch eine Veranschaulichung des Systems, der man die Anerkennung nicht versagen darf. Sie banden 10 Stäbchen mit einem Gummifaden zu einer Einheit zusammen und ließen nun mit diesen Einheiten höherer Ordnung wie mit gewöhnlichen Einheiten rechnen. Auch Hunderter wurden von einzelnen so dargestellt. In der Hand eines begeisterten Lehrers wird diese Veranschaulichung zweifellos gute Früchte tragen. Neben den Vorteilen der dinglichen Gestalt und der verhältnismäßigen Merkmalsarmut hat sie freilich auch einen nicht zu unterschätzenden Nachteil: Die Zehner müssen auf guten Glauben hingenommen werden, die Möglichkeit des Nachprüfens ist ziemlich erschwert; dies kann nur durch Auseinandernehmen und Auszählen erfolgen. Das bedeutet aber einen nicht unbeträchtlichen Energieverlust, dem an dieser Stelle kein formaler Gewinn gegenübersteht. Nun ist aber gerade das Wesen des ganzen Systems die übersichtliche Gliederung. Eine Veranschaulichung, welche dieser übersichtlichen Gliederung Rechnung trüge in dem Sinne, daß sie gestattete, den Zehner momentan als 10 Einheiten aufzufassen, auf Verlangen aber auch als eine einzige Einheit höheren Grades, wäre jener Veranschaulichung durch Stäbchenbündel ohne Zweifel überlegen. Dies ist in der Tat gegeben in unseren Zahlbildtafeln. Indem die Kinder an ihnen die Zahlgrößen abschätzten und dann auszählend nachprüften, kamen sie in vielhundertfacher Übung dazu, in Zehnern zu zählen. Dieses

Auszählen würde ja auch mit Stäbchenbündeln möglich sein. Aber bei den Zahlbildern läuft halb bewußt und ununterbrochen die Kontrolle nebenher, daß jeder Zehner auch wirklich seine 10 Einheiten enthält. Wir konnten das gut beobachten, als wir die Zahltafeln, welche die Kinder in Händen haben, noch mit farbigen Blättchen bekleben ließen. War einmal irgendwo ein solches Blättchen abgefallen, so wollte das Kind — auf den ersten Blick — den betreffenden Zehner eben nicht als Zehner anerkennen und fügte hinzu, obwohl alle Beteiligten das selbst sahen, obwohl es auch manchmal für den Zahlbegriff völlig überflüssig war: „Aber hier fehlt eins."

Das in Zehnerrhythmen erfolgende Auszählen, welches die Übungen der Zahlauffassung und Zahldarstellung begleitet, tritt uns damit als zweite wichtige Vorbereitung für die Einführung ins Zahlensystem entgegen.

Die Hunderterzahlbildtafel ist selbstverständlich nicht die einzig mögliche Form. Eine andere, auch recht empfehlenswerte sind Übungen mit dem Metermaße (Bandmaß), zumal mit einem, dessen Dezimeter abwechselnd rot und weiß oder sonstwie gegeneinander farbig abgesetzt sind. Es hat für die Zahlauffassung freilich den einen Nachteil, daß die Kinder leicht an der Vorstellung der Ziffer hängen bleiben. Bei schwachen Kindern, zumal bei solchen, die vorher auswendig gelernt haben, die also nicht zur Vorstellung der Zahlgröße erzogen worden sind, bereitet es ziemliche Schwierigkeiten, wenn man sie gewöhnen will, unter 76 cm sich die Strecke vom linken Ende des Bandmaßes bis zu dem Stück — einschließlich! — vorzustellen, auf dem die Ziffern 7 und 6 stehen. Solche Kinder fassen eben bei dem Klange 76 diesen einen kleinen Raum ins Auge, auf dem sie diese Ziffern in dieser Zusammenstellung sehen. Solchen Schwierigkeiten kann auf einer früheren Stufe noch manchmal aus dem Wege gegangen werden. Später muß man ihnen besondere Aufmerksamkeit widmen und sie planmäßig zu überwinden suchen. — Ein anderer Nachteil des Bandmaßes gegenüber der Hundertertafel ist es ja auch noch, daß jenes das Aufbaumotiv 10·1 hat, während diese das andere: 2·5 aufweist; dies letztere aber erleichtert das Überblicken ganz wesentlich, und zwar nicht nur das der Einer, sondern vor allem auch das der Zehner. — Wir sehen, was wir wiederholt betonen müssen, daß es kein universales Anschauungsmittel gibt, daß vielmehr jedes seinen ihm eigenen Wert hat und die anderen ergänzt. In diesem Sinne ist auch das Bandmaß ein ganz ausgezeichnetes Versinnlichungsmittel der in Zehnerrhythmen dahinschreitenden Zahlen-

reihe, das wir mit gutem Erfolge benutzt haben und nicht missen mögen[1].

Ein weiteres gutes Veranschaulichungsmittel für die Einführung ins Zahlensystem ist unser Geld. Es hat zwar auch den Nachteil der Ziffer, aber der wird hier aufgewogen durch Größe, Gewicht und Farbe (letztere als Merkmale andersartigen Materials) des Zehnpfennigers gegenüber den Kupferpfennigen. Auch das Hinzutreten der Mark erhöht die Wirkung wesentlich. Dazu kommt, daß es den Kindern schon bis zu einem gewissen Maße vertraut ist. Leider ist wirkliches Geld für die Hand der Kinder zu kostspielig, wenigstens in dem zweckmäßigen Umfange. Anschauungsbilder des Geldes haben neben manchem hier schon berührten Vorteil eben den gewichtigen Nachteil, daß sie nur für das Auge und nicht für die Hand des Kindes bestimmt sind, während den Spielmarken wiederum die eigenartige Gefühlsbetontheit des wirklichen Geldes abgeht. Dahingehende Versuche, die wir jahrelang mit wirklichem Gelde unternahmen, haben aber immer zu dem Ergebnis geführt, daß sein Gebrauch wirksam die Einführung in das System unterstützt. Es dürfte darum als Anschauungsmittel neben anderen nur zu empfehlen sein.

Auf Grund solcher ausgiebigen Vorbereitung begegnet dann die Einführung in das System keinen Schwierigkeiten mehr. Es gilt nur, solange die Übungen sich noch im Zahlenraume bis 100 bewegen, die Zehnereinheit mehr zu betonen. Dazu gehört zunächst die Übung, die Zehnereinheiten mit den Einereinheiten zu vergleichen, z. B.: „Wenn man 60 Einer (auch die Form Einser wäre anfänglich zulässig) zählen will, dauert es lange; wenn man aber 6 Zehner zählt, geht es ganz flink, und es ist doch gerade soviel[2].“

[1] Besser als das gewöhnliche wäre allerdings eins, das nur auf einer Seite die Ziffern zeigte, während auf der anderen Seite nur die Zentimeterstriche mit farbig abgesetzten Dezimetern zu sehen wären. Als beste Schulform aber würde eines ohne alle Ziffern anzusehen sein — so wie es die alten Ellen waren mit den schönen Einlagen oder Einkerbungen — oder eins mit alleiniger Bezifferung der Zehner als Zehner, also 1, 2, 3 usw.

[2] Hier ist wieder darauf zu achten, daß das, was uns ganz selbstverständliches Erfordernis ist, dem Kinde recht neu und interessant erscheinen kann: es freut sich darüber, staunt über die Tatsache, als wenn es sie gar nicht erwartet hätte. Von dieser Erfahrung aus gewinnt das Wort seine Bedeutung, daß die besten Mathematiker oft die schlechtesten Rechenlehrer seien. Zum Rechenlehrer gehört selbstverständlich mathematische Bildung, je mehr, desto besser, wie zu jeder Allgemeinbildung. Aber in mindestens dem gleichen Maße wie mathematische braucht der Rechenlehrer psychologische Bildung. Der gute Mathematiker, dem diese psychologische Bildung abgeht, kann es darum „absolut nicht fassen, daß je ein Kind so dumm sein kann“, diese oder jene „ganz elementare Wahrheit“ nicht oder nur langsam zu begreifen. Ich gestehe ganz offen, daß ich in jüngeren Jahren selbst in Zweifel gezogen habe, daß jener Ausspruch recht haben könnte.

Weitere Übungen in dieser Richtung sind folgende: **Verwandlung der Zehner in Einer und der Einer in Zehner.** Sie schließt sich unmittelbar an die vorige an, und sie muß sehr ausgiebig betrieben werden, da sie den Kindern größere Schwierigkeiten bereitet, als die Beziehung der Hunderter zu den Einern. Ferner **Zerlegung** der aufgefaßten oder dargestellten Zahlen in Zehner und Einer, immer verbunden mit dem Zeigen des Gesagten. Sodann **Umstellen** der üblichen Zahlwörter, also sechzig und fünf, dreißig und neun usw., und zwar sowohl bei Auffassungs- wie bei Darstellungsübungen. Hierbei wirkt ganz besonders der Kontrast, das Ungewohnte. Die Kinder behaupteten, so wäre es doch eigentlich richtig, bei größeren Zahlen sagte man doch auch erst die Hunderter[1]).

Ein weiterer Schritt der Einführung in das System ist es, wenn man **den Hunderter überschreitet**, also den Zahlenraum bis 1000 betritt. Denn nun ist auch der Hunderter als Einheit aufzufassen, und es können nun Einheiten dreier Grade nebeneinander gestellt werden. Meter und Mark werden dabei gute Dienste leisten. Außerdem sind auch an dieser Stelle die Hunderterzahlbilder zu verwenden. Jedes Kind hat mindestens 10 Stück. Die heftet es sich zusammen wie ein Buch oder verbindet sie mit einer Heftklammer oder steckt sie auch nur in einen Briefumschlag. Und nun können die **Zahlauffassungs- und Zahldarstellungübungen** wieder beginnen. Es ist besonders darauf hinzuweisen, daß es **solche** Übungen zunächst sind und nicht Operationen, die in Betracht kommen. Mittels der Operationen die Reihe der Zahlbegriffe erweitern zu wollen, hat keinen Sinn, hat fast ebenso wenig Sinn, wie wenn jemand durch Nachdenken herausbekommen wollte, ob ein Pferd, das hinter seinem Rücken vorbeiläuft, braun oder scheckig aussieht. Beim Nachdenken und bei den Operationen handelt es sich um Beziehungen der Begriffe, bei der Feststellung der Farbe und bei der Erweiterung der Reihe der kindlichen Zahlbegriffe um sinnliche Wahrnehmungen, die mit den dafür üblichen Ausdrücken belegt werden.

Die Auffassungs- und Darstellungsübungen im Zahlenraum bis 1000 schließen sich auch in der äußeren Form an die früheren an. „Wir wollen bis 657 zählen!" Das dauert lange, meinen die Kinder, und es kann ja einigemal tatsächlich ausgeführt werden — wobei alle Kinder abwechselnd mithelfen —, schon um das Bedürfnis nach Abkürzung recht lebhaft werden zu lassen. „Wer kann es schon schneller?" Das können natürlich alle, und sie zählen, auch das schwächste Kind: „Erst 6 Hunderter," und dabei blättert es

[1]) Und sie fragten, wie das käme. Eine mathematische Antwort war es natürlich nicht, die sie bekamen, sondern eine sprachkundliche.

6 Hunderterblätter herum, dann nimmt es das 7. Blatt zur Hand und spricht: „Und dann noch 5 Zehner und zuletzt noch 7 Einer, 657." Auch Auffassungsübungen sind entsprechend zu gestalten: „Zählt bis zu diesem Ringel!" und die Kinder zählen 4 Hunderter, 3 Zehner, 2 Einer und fügen hinzu 432. Jede Zahl bis zur 1000 läßt sich auf diese Art sinnlich erfassen — wenn man will, noch darüber hinaus. Verwandlungen und Zerlegungen — sie sind ja eigentlich nur formelle Abänderungen der bisherigen Übungen — sind auch hier zu berücksichtigen.

Damit ist die Einführung ins System eigentlich geschehen. Die Beherrschung tritt erst langsam ein, wenn auch die Operationen in diesem Zahlraum geläufig zu werden beginnen. Davon wird im folgenden Abschnitt die Rede sein.

Sollen wir nun bei 1000 aufhören mit der Vorführung des Systems? Manchem wird die „ewige Anschauung" schon viel zu lange gedauert haben; er wird durch „reine Begriffe" und Nachdenken auch schon den größten Teil der bisherigen Zahlbegriffe haben gewinnen wollen. Wir geben gern zu, daß mit zunehmender Klarheit über den systematischen Aufbau der Zahlgrößen auch das Vermögen sich entwickelt, diesen Aufbau in logischer Fortentwicklung zu denken. Aber man soll dies Denken von Worten nicht zu hoch einschätzen, zumal bei Kindern. Es ist wirklich nichtssagend, wenn jemand behauptet, er wisse, wieviel 1000 ist, und demnach auch, wieviel 10 Tausend und 100 Tausend. Es sind das tatsächlich meist Worte, die kaum von einem schwachen Multiplikationsgefühl begleitet sind, d. h. solche haben die unterbewußte Vorstellung, daß die 100 000 tatsächlich 100 mal soviel sei als die 1000, sie fühlen, welche Tätigkeit wohl in Betracht zu kommen habe, aber es ist nicht klar, insbesondere nicht, welche Wirkung das haben würde. Einer, der die 100 000 in voller Klarheit erwirbt — nicht einer, bei dem sie durch vielfachen Gebrauch wieder mechanisiert worden ist — hat dabei ein ganz anderes Gefühl als jenes, das wir Multiplikationsgefühl nannten. Wir könnten dies andere etwa als Ergebnisgefühl bezeichnen[1]. Diese Klarheit ist aber — zumal in der Zeit des Erwerbs — bei den meisten in hohem Maße abhängig von dem Vorhandensein einer den Begriff vertretenden schwachen Raumvorstellung. Gerade weil mancher behauptet, er sei nicht imstande, sich 10 — nicht die Ziffern, sondern Dinge oder Zahlsymbole — mit völliger Klarheit vorzustellen, haben wir den Versuch gemacht, unsern Kindern auch noch die 10 000 zur Anschauung zu bringen. Die 1000 hatte ja jedes schon in der Hand. Es ist für

[1] Es sind dies Ergebnisse mehr subjektiver Erfahrung in Verbindung mit psychologischen Beobachtungen. Die exakte Forschung ist an diese Gebiete noch nicht herangetreten.

sie ja ein freudiges Ereignis, wenn sie das erste Mal 1000 nebeneinander sehen und gar selbst besitzen. Zehn solcher Hunderterbilder mit Reißzwecken an die Wandtafel geheftet, nehmen einen gar nicht so großen Raum ein und sind doch 1000 Ringel! Zu 10000 aber brauchen wir eine etwas größere Wandtafel oder zwei. Überdies wolle der freundliche Leser rasch überblicken, wieviel Punkte auf der untenstehenden Tafel sich befinden, und ob einer irgendwo fehlt. Danach wäre es also auch möglich, Schulkindern die Million anschaulich und übersichtlich gegliedert vorzuführen

auf einem Raume, der kaum größer als 2 qm sein wird (1,3 · 1,6 m); man braucht nur 100 solcher Blätter in der bekannten Ordnung nebeneinander an die Tafel zu heften.

Belehrend, d. h. hier in den Geist der Sache einführend, ist es auch, wenn die Kinder dabei erkennen, daß der Zehner immer ein Rechteck darstellt, der Hunderter immer ein annäherndes Quadrat (das ganz genau wäre, wenn wir nicht in der einen Richtung Fünfer-, in der anderen Zweiergliederung gewählt hätten), der Tausender wieder ein Rechteck, der Zehntausender wieder ein Quadrat, der Hunderttausender ein Rechteck, die Million ein Quadrat. Belehrend ist es weiter, wie gegenüber Zahlen wie Milliarden die bisher geübte Veranschaulichung versagt. Verkleinert werden kann der Maßstab nicht. Hängen wir eine halbe Wand voll solche Blätter, so können es — wenn sie lang genug ist — 10 Millionen werden, bei der ganzen 20. Für eine Milliarde brauchten wir sämtliche langen Seitenwände einer großen Schule von 50 Klassen usw.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß die wichtigste Einzelheit bei der Einführung ins System darin besteht, die Kinder eindringlich und immer wiederholt fühlen und begreifen zu lassen, welche außerordentliche Erleichterung ihrer Rechenarbeit ihnen das System bietet, und zwar nicht nur für das Zählen, sondern auch für die eigentlichen Rechenoperationen.

Dies Begreifen läßt sich stark unterstützen durch einige einfache Mittel, an die der Lehrer in erster Linie sich selbst zu gewöhnen hat. Zunächst dadurch, daß man das Lesen größerer Zahlen — schon die dreistelligen kommen in Betracht — zwar nicht immer, aber doch immer und immer wieder mit der Gliederung in die sämtlichen Systemeinheiten betreibt. So wird die Zahl 5327096 nicht bloß in der uns geläufigen und üblichen Form gelesen, sondern öfters außerdem noch so: 5 Millionen, 3 Hunderttausender, 2 Zehntausender, 7 Tausender, keine Hunderter, 9 Zehner, 6 Einer. Ferner dadurch, daß man auch die Verwandlung der einzelnen Einheiten ineinander bei solcher Gelegenheit fleißig übt: 689 zunächst wie vorhin, dann aber auch als 68 Zehner und 9 Einer, oder bei der obigen größeren Zahl heißt es: Sprich sie so aus, daß du immer 2 Ziffern zusammen nimmst! 53 Hunderttausender, 27 Tausender, 96 Einer. Oder: Fang von hinten an! 96 Einer, 70 Hunderter, 32 Zehntausender, 5 Millionen. Auch drei Ziffern können so zusammengenommen werden. Endlich geschieht es dadurch, daß bei den verschiedenen Operationen jederzeit und ausnahmslos die einzelne Einheit für sich behandelt wird.

§ 21. Die Einführung in die Bruchzahl.

Eine höhere Stufe der Entwicklung hat der Zahlbegriff zu erklimmen, wenn er sich über den Gedanken erheben will, daß die Zahl eine Summation von vollen Einheiten darstelle, wenn also der Begriff der **Bruchzahl** erworben wird.

Zunächst sei dies vorausgeschickt, daß Kinder der Unterstufe im allgemeinen noch nicht so weit sind, den Inhalt eines Begriffs ohne weiteres aus seiner **sprachlichen Bezeichnung** zu erschließen, selbst wenn diese Sprachbezeichnung ihnen bekannt ist und nicht über ihr Verständnis hinausgeht. Sie fühlen noch nicht die Notwendigkeit der Übereinstimmung zwischen Sache und Wort. Gut- und mittelbefähigte Kinder des 3. Schuljahres, denen die Frage vorgelegt wurde, wieviel Drittel ein Apfel habe, konnten sich zunächst nur dazu verstehen, er müsse 4 Drittel haben, und daß, obwohl auf den Ausdruck Drittel, sogar auf die vermutliche Verwechslung mit Viertel besonders hingewiesen wurde. Das Zeichnen mit der Drittel- und Vierteilteilung nebeneinander brachte dann den gewünschten Erfolg. Ebenso hielten sie zunächst für möglich, daß es auch Äpfel gäbe, die 5 Viertel hätten. In jenem ersten Falle mag diesen Kindern die in viel höherem Maße gebräuchliche Teilung in Viertel beharrlich vorgeschwebt haben, ohne daß sie sich von diesem Gedanken befreien konnten, während der Erläuterungen und der zweiten Frage aber mag leise das Gefühl dafür gekommen sein, daß man ein Ding doch nicht gerade in 4 Teile zu teilen nötig habe, es müßten — je nach der Zahl der „Teil-nehmer" — auch 5 sein können. Von dieser neuen Erkenntnis war die Aufmerksamkeit ganz in Anspruch genommen und konnte nun dem Ausdruck Viertel — bei dieser letzteren Aufgabe — nicht in gleicher Stärke zugewendet bleiben.

Es erscheint daher zweckmäßig, sich nicht allzu stark auf die Wirkung derjenigen **Vorübungen** zu verlassen, welche für die Bruchrechnung allgemein gebräuchlich sind. Diese benutzen schon vor dem Eintritt der eigentlichen Bruchrechnung die üblichsten Bruchformen Halbe und Viertel, in seltenen Fällen auch Achtel, Drittel, Fünftel und Zehntel. Sie führen den häuslichen Gebrauch weiter und übertragen ihn auf Zahlverhältnisse. So durchaus notwendig und wichtig es nun ist, solch vorhandenes Gut zu pflegen und weiterzuentwickeln[1]), so mußte doch eben vor dem Irrtume gewarnt werden, als sei mit dem häuslichen Gebrauche die innere Klarheit schon gegeben. Denn dieser Gebrauch läßt wohl eine dunkle Vorstellung davon zurück, daß Halbe und Viertel weniger sind als das Ganze,

[1]) Wie das zweckmäßig in bezug auf die Operationen geschehen kann, wird später zu besprechen sein; vergl. dazu den Abschnitt Bruchrechnung.

aber zur vollen Klarheit fehlt oft noch ein gutes Stück. Auf jeden Fall müssen wir uns vergewissern, ob die vom Kinde gehandhabte Bruchbenutzung auf fester, sicherer Grundlage ruht.

Voraussetzung für diese Grundlage ist möglichst klares **Operationsverständnis (des Kindes) für das Teilen**, die Grundlage selbst ist die Anschauung, das wiederholte, allseitige, planmäßige Verfahren. So selbstverständlich zwar jene Voraussetzung erscheint, so ist sie doch nicht immer verwirklicht. Denn viele Kinder können wohl dividieren — d. h. sie haben ihre Divisionssätzchen auswendig gelernt —, aber teilen oder verteilen würde man vergeblich von ihnen verlangen. Jene Voraussetzung müßte natürlich nachgeholt werden durch wirkliches Teilen von Dingen, das nach Bedarf wiederholt wird.

Aber auch dann, wenn man — von dieser Voraussetzung ausgehend — den Zahlbegriff zu erweitern gedenkt durch Einführung der Bruchzahl, kann das wirkliche Tun, das Handeln nicht entbehrt werden. Das ist ja ein wesentliches Merkmal wirklicher Anschauung. Ein recht zweckmäßiges Hilfsmittel für diese handelnde Anschauung ist **Papier, das gefaltet wird**. Wäre das Papier zu Pestalozzis Zeit schon etwas wohlfeiler gewesen, ihm hätte schon die Einführung der Bruchzahl so gelingen müssen, wie es hier dargestellt werden soll. Denn für die große Bedeutung des eigenen Tuns, des Tuns überhaupt für das Lernen, hatte er ein feines Verständnis; und seine Bruchtabellen, die allerdings eben nur für das Anschauen berechnet sind, können wir einfach als Vorbilder benutzen.

Die Kinder haben einige Blätter Papier von gleicher Größe, etwa Quartblätter, vor sich. Nun wird ihnen gezeigt, wie man bei einem solchen Blatte Ecke auf Ecke legt[1]) und dann einen „**Bruch**" hinein macht. Indem sie das nachmachen, haben sie 2 Halbe hergestellt. Sie werden feststellen können, daß oben ein halbes und unten ein halbes Blatt ist, daß die beiden Hälften gleich sind usw. Sie werden den Wert auch mitten hinein in die Teile schreiben können: eine Hälfte, eine Hälfte. Dies Blatt wird nun als „Bruchblatt" von jedem Kinde im Rechenbuch oder in einem passenden Umschlage aufbewahrt und gelegentlich herausgeholt, wobei sein Entstehen ins Gedächtnis gerufen wird. Ein zweites Blatt wird durch einen wagerechten und einen senkrechten Bruch in vier **Viertel** gebrochen. Auch hier enthält jeder Teil seine schriftliche Bezeichnung in Worten: ein Viertel, ein Viertel, ein Viertel, ein Viertel und später auch in Ziffern: $\frac{1}{4}$ usw. Die Kinder zählen dann wiederholt, wieviel solche Viertel das ganze Bruchblatt hat und vergleichen

[1]) Bei Kindern, die im Anschauungsunterricht schon das Falten geübt haben, kann dies Vormachen wegfallen.

die Viertel untereinander und mit den Hälften durch Auflegen und Ausmessen. Ein drittes Blatt wird später durch drei wagerechte und einen senkrechten Bruch in 8 Achtel gebrochen. Auch hier wird der Wert in jeden Teil eingeschrieben. Wenn man soweit gekommen ist, kann man Halbe, Viertel und Achtel vergleichend nebeneinander und aufeinander legen, gegen das Licht halten, sie auch ausmessen. Die Beziehungen ergeben sich von selbst.

Drei weitere Blätter ergeben dann mit zwei wagerechten Brüchen Drittel, mit einem senkrechten dazu die Sechstel, mit drei senkrechten auch die Zwölftel. Diese letzteren können auch mit drei wagerechten und zwei senkrechten erscheinen. Endlich sind noch zwei Blätter für Fünftel und Zehntel bestimmt. Das wäre der Bruchvorrat, mit dem wir längere Zeit auskommen[1]) und an dem auch später noch Auffassungs- und Darstellungsübungen vorgenommen werden, z. B.: Sagt, was ich zeige! $^1/_2$, $^2/_4$, $^3/_4$, $^3/_5$, $^6/_{10}$, $^5/_8$, $^3/_8$ usw. oder: deckt ab, so daß man sieht $^4/_8$, $^8/_{10}$, $^7/_8$, $^5/_{12}$, $^2/_4$ usf., oder bei weiteren Darstellungsübungen: Seht allemal nach, wieviel ihr abdecken müßt! oder: Wer kann ohne Hinsehen sagen, wieviel abgedeckt ist? Ferner: Vergleicht Sechstel und Zwölftel einzeln miteinander! Vergleicht Achtel und Zehntel! ($^1/_8$ ist mehr als $^1/_{10}$, $^2/_8$ sind mehr als $^2/_{10}$, $^3/_8$ sind beinahe $^4/_{10}$, $^4/_8$ sind genau soviel wie $^5/_{10}$ usw. Diese letzteren Formen führen bereits hinüber zu den Operationsübungen, die an diesen Bruchblättern vorgenommen werden.

Eine weitere Teilstufe besteht darin, solche Übungen mit anderen Papiergrößen vorzunehmen, z. B. mit quadratischen Blättern von etwa 12 cm Seitenlänge. Jetzt gibt es kleine Viertel und große Viertel, kleine und große Zehntel, je nachdem kleine oder große Blätter gebrochen worden sind. Und doch sind die einen wie die anderen Viertel, die einen wie die anderen Zehntel, und das Kind gewinnt die Erkenntnis, daß die einzelnen Brüche verschiedenen Wert haben je nach der Größe der Einheit, welche geteilt wurde. Diese Erfahrung muß handgreiflich und oft wiederholt den Kindern nahe treten. Man kann nach und nach weiter gehen und beispielsweise aus Streifen von 4 · 1 cm Viertel brechen lassen. Solche, die nicht so rasch all dies erfassen, daß es ihnen fast zufällt, die andrerseits aber auch sich nicht mit Nachsagen begnügen, werden leicht in Staunen und Freude geraten darüber, daß es wirklich geht. Diese Erkenntnis ist eben eine mathematische Errungenschaft für

[1]) Daß man je nach den Umständen auch Neuntel, Siebentel und noch andere hinzufügen kann, in dieser Ausführung als Bruchblatt nämlich, daß man ferner Sechstel, Neuntel usw. auch in verschiedenen Bruchformen haben kann, um gegenseitig besser vergleichen zu können, das braucht nur angedeutet zu werden.

das Kind, während wir wiederum schwer fassen können, daß das alles dem Kinde nicht selbstverständlich erscheint.

Wenn dann diese Erfahrung ausreichend und gründlich genug erlebt, wenn sie durch das Bewußtsein von ihrer Notwendigkeit zur Erkenntnis geworden ist, dann kann übergegangen werden zu einer dritten Teilstufe, da das ganze Papierblatt **eine größere Zahl** vertritt. Auch hier leisten die Hunderterblätter gute Dienste. Sie sind ja auch nicht so kostspielig, daß nicht etliche „zerbrochen" werden könnten. In Viertel gebrochen, zeigt das Hunderterblatt 4 Fünfundzwanzigen, das Achtel „von 100" besteht aus 5 Zweien und 5 Halben, Fünftel- und Zehntelbrüche sind auf einem anderen Blatte möglich; sie zeichnen sich aus durch ihre Bequemlichkeit. Diese fehlt hingegen ganz und gar bei Dritteln und Sechsteln. Wenn man nicht einzeln auszählend verteilen will — das geht auch —, so gelingt es nur dadurch, daß man die wagerechten Bruchlinien so legt, daß auf jeden Teil 10 Dreien und 10 Drittel kommen. Aber wenn wir das oben und unten machen, kommt da der mittlere Teil nicht zu schlecht weg? fragt das Kind. Das muß ausgezählt und ausgerechnet werden. Und mit Sechsteln ist es ähnlich. Ebenso geht es mit Teilstücken: Viertel, Achtel und Zehntel von 40 lassen sich ganz leicht darstellen, Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel und Zwölftel von 60 ebenfalls; auch 20 und 80 sind diesen Bruchformen zugänglich.

Ist das nicht — hören wir da sagen — schon eigentlich Prozentrechnung und Multiplizieren mit Brüchen? Freilich ist es das. Man kann allerdings auch sagen, das ist es nicht, denn es sind ja weiter nichts als Zahlauffassungs- und Darstellungsübungen, Übungen allerdings, welche jenen Operationsformen alle Schwierigkeiten zu nehmen geeignet sind. Wer die Bruchauffassung so einführt, wird jedenfalls nicht über mangelndes Verständnis zu klagen haben. Steht er trotzdem vor dieser Tatsache, so mag er nicht suchen, an wessen Versäumnis die Schuld liegt, sondern mag herzhaft zu dem einzigen Mittel greifen, das alle solche Kinderschäden heilt: die vollkommene Anschauung im eigentätigen Erleben.

§ 22. Die allgemeine Zahl.

Um den Begriff der allgemeinen Zahl zu gewinnen, können — wie leicht einzusehen ist — Auffassungs- und Darstellungsübungen nicht mehr in Betracht kommen. Diese widersprechen ja geradezu dem Wesen der allgemeinen Zahl. Denn wenn wir etwas wiederholt auffassen und darstellen, tun wir dies in der Absicht, die Auffassung auch in ihren Teilen immer genauer und feiner zu gestalten. Bei der allgemeinen Zahl kann aber von solch genauerer Auffassung keine Rede sein. Das Begriffsgefühl zeigt sich vielmehr besonders

stark dann, wenn Vertretungsvorstellungen von der Form der gewöhnlichen Zahlen eingesetzt werden sollen. Jeder ist sich dann dessen bewußt, daß auch ihrer viele den Umfang des Begriffs der allgemeinen Zahl bei weitem nicht ausfüllen. 11 ist nicht a. Das Wesen der allgemeinen Zahl im Gegensatz zur gewöhnlichen Zahl besteht eben in der Freiheit von dieser Bestimmtheit; als wesentliche Merkmale kommen nur noch die Beziehungen in Betracht; die Sachgröße verschwindet, die Beziehungsgröße wird allein herrschend. Auch darin zeigt sich der Fortschritt der Abstraktion.

Daher ist die Einführung in dies Gebiet nicht denkbar ohne operative Übungen. Wir könnten daher an dieser Stelle davon absehen, diese Einführung darzulegen, und sie zurückstellen, bis die Operationen besprochen worden sind. Um des Zusammenhangs und des Überblicks willen sollen aber wenigstens einige der wichtigsten Gedanken hier Platz finden.

Die Einführung kann ausgehen von den bereits vorhandenen allgemeinen Zahlen, mit denen die Raumlehre hantiert. Diese ist nach den meisten Schulplänen vor Eintritt der hier in Rede stehenden Erweiterung des Zahlbegriffs so weit gefördert worden, daß eine Reihe von Formeln den Schülern geläufig oder wenigstens verständlich sind, wie $g \cdot h$ für die Inhaltsberechnung des Parallelogramms, $\frac{g \cdot h}{2}$ für die des Dreiecks, s^2 für die des Quadrats, $r^2 \pi$ für die des Kreises, $4s$ als Formel für den Umfang des Quadrats, $2r\pi$ für den Umfang des Kreises u. a. m., sowie die davon abgeleiteten, wie $g = \frac{J}{h}$ usw.

Diese allgemeinen Zahlen sind auch bei ihrer ersten Einführung dem Schüler nicht schwer gefallen. Denn sie erschienen ihm als Abkürzungen für Grundlinie, Höhe, Seite, Radius usw., also als Bezeichnungen geometrischer Strecken, deren Maßzahlen die verlangte Berechnung ermöglichen. In dieser Auffassung, daß für den Jugendlichen die ihm bekannten allgemeinen Zahlen durchweg Strecken bedeuten, liegt einerseits eine gewisse Schwierigkeit. Denn die allgemeine Zahl soll doch — das ist ihr Sinn — von der bisherigen Zahlvorstellung abstrahieren, um zu einer höher entwickelten Form des Zahlbegriffs zu gelangen[1]; und für diese Abstraktion könnte die Vorstellung der Strecke als ein Hemmnis erscheinen. Andrerseits zeigt sich in der Auffassung der allgemeinen Zahl als Strecke eine gewisse Erleichterung insofern, als sogar die gegebene

[1]) Diese Abstraktion ist durchaus nicht leicht. Wer es selbst erprobt hat, wird gefunden haben, daß es immer eine Anzahl Schüler gibt, die ihr nicht geringen Widerstand entgegen setzen, abgesehen natürlich von solchen, die auswendig lernen, und denen mit der Zeit im Gebrauche ein schwaches Licht aufgeht.

ersten Stufen. Die Einführung der negativen Zahl sucht man zu verdeutlichen durch ähnliche Erscheinungen auf verschiedenen Lebensgebieten: Vermögen und Schulden, Wärme- und Kältegrade, vergangene und künftige Zeit, Mischungsrechnung mit gegebener Mittelsorte usw., und die irrationalen Zahlen veranschaulicht man als bisher noch nicht bestimmte Punkte der Zahlenlinie, die imaginären als außerhalb der Zahlenlinie liegende Raumpunkte. Aber diese Versinnlichung ist doch etwas ganz anderes als die bei der Gewinnung der Zahlreihe oder des Zahlsystems. Sie ist gewissermaßen ein nettes, aber kaum nötiges Bild jener Begriffe, kaum nötig, weil die Abstraktionsfähigkeit so weit entwickelt ist, daß der Begriff selbst ohne diese Versinnlichung gewonnen werden kann. Dies „kaum nötig" ist aber nicht gleichbedeutend mit unzweckmäßig; im Gegenteil: obwohl die Versinnlichung gegebenenfalls entbehrt werden kann, ist es doch zweckmäßig, sie zu gebrauchen, und zwar aus demselben Grunde, aus dem auch sonst alle Versinnlichung des Begrifflichen erfolgt: es klarer, deutlicher und damit wirkungsvoller zu gestalten[1]).

3. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die Gewinnung der Operationen.

§ 23. Die Gliederung der Aufgaben.

Wenn ein Schlosser seinem neu eingetretenen Lehrling die Aufgabe stellte, er solle einen Schlüsselbart ausfeilen nach dem ihm gegebenen Muster, zugleich aber auch darauf achten, welche Menge Feilspäne bei jedem Stoße abfiele, so würde jeder diesen Meister für sehr unverständig erklären, weil er ja nicht einmal wüßte, daß man immer nur eins auf einmal tun könne, zumal der Anfänger. Dieser hat — um es psychologisch auszudrücken — gerade genug damit zu tun, seine Aufmerksamkeit auf eine der beiden Aufgaben einzustellen. Er kann sie der anderen erst dann zuwenden, wenn die erste erledigt ist.

Nichts anderes als die Rolle des unverständigen Lehrmeisters aber scheinen wir Pädagogen des öfteren spielen zu müssen, wenn wir unsern Kindern, Anfängern in der mathematischen Erkenntnis, zumuten, sie sollen aus der 10 eine 7 oder aus der 11 eine 5 machen und dabei auch noch darauf achten, wieviel weggenommen werden

[1]) „Jeder Begriff hat nur Inhalt durch die jeweilige Größe des Betrags an sinnlicher Erfahrung, die wir damit verbinden" (Wundt, Logik I, S. 75). Vergl. dazu auch die weitere Ausführung auf S. 58 des vorliegenden Werkes.

müsse. Es fällt zwar vielen von uns, wie auch jedem erwachsenen Laien, außerordentlich schwer, in dieser Forderung eine besondere Schwierigkeit zu finden. Aber die praktische Beobachtung der Kinder, verbunden mit immer tiefer dringenden psychologischen Studien, gestattet keinen anderen Schluß, als daß der Sachverhalt in beiden Fällen, in dem des Lehrlings und in dem des Elementarschülers — selbstverständlich mit den durch die Umstände gebotenen Unterschieden — psychologisch im Grunde genommen der gleiche ist.

Daraus ergibt sich als erste grundsätzliche Anweisung über das Lehrverfahren eine Teilung der Aufgaben in der Richtung, daß wir einerseits die Kinder einführen in den Sinn der verschiedenen Operationen, und daß wir andrerseits ihre Aufmerksamkeit richten lassen auf das Ergebnis der durch die Operationen erfolgten Veränderungen. Wie wir nun auch die folgenden Aufgaben gliedern mögen, von vornherein ist klar, daß die Einführung in den Sinn jederzeit die erste Aufgabe zu bilden hat. Möglich wäre es, die Einführung in den Sinn der verschiedenen Operationen als Gesamtaufgabe in einem längeren Zeitraume zu erledigen, um dann später an die einzelnen Operationen mit dem Blick auf ihre Ergebnisse heranzutreten. Möglich wäre auch die Art, daß man jeder Operation für sich die Einführung in den Sinn voranstellte. Das Lehrverfahren ändert sich nicht wesentlich, ob man sich nun für die eine oder die andere Art entschließen möge, wie sich leicht aus dem folgenden ersehen läßt. Wenn wir hier die erste jener beiden Arten darstellen, so leitet uns lediglich der Gedanke, inhaltlich Gleiches bei der Darstellung nicht wiederholen zu müssen.

§ 24. Die Einführung in den Sinn der Operationen.

Das Ziel der hier in Betracht kommenden Unterrichtsarbeit muß sein, den Kindern die mathematischen Tätigkeiten des Hinzufügens, des Wegnehmens, des Zerlegens und des Ergänzens, des Malnehmens, des Verteilens, des Zerlegens in Faktoren und des Messens begrifflich geläufig zu machen in dem Sinne, daß das Kind nicht nur diese Tätigkeiten kennt — d. h. weiß, was darunter zu verstehen ist —, sondern auch kann, d. h. ausüben kann. Die „Geläufigkeit" eines Begriffs müssen wir für diese Stufe eben so verstehen. Dabei muß immer wieder betont werden — weil unser bisheriger Rechenunterricht das vernachlässigt — daß dabei kein anderes Ergebnis in Betracht kommt als dies: er kann schon austeilen, ihr könnt schon messen usw. Dieses Geläufigwerden des Tätigkeitsbegriffs geschieht nicht durch Nachsagen der Worte, selbst nicht durch öfteres Vormachen, sondern

durch wirkliches Ausführen. Selbstverständlich treten die Vorführung und die verschiedenen sprachlichen Bezeichnungen, die den Kindern noch nicht bekannt sind[1], nach und nach hinzu, aber die wirkende Ursache ist eben jenes wirkliche Ausführen. Wie gestaltet es sich?

Wenn man die rechnerischen Tätigkeiten in ihrer Gesamtheit überblickt, so sieht man sofort, daß die uns geläufige Anwendung auf Zahlgrößen eine Verengerung ihres Anwendungsgebietes bedeutet, die durch nichts gerechtfertigt wird. Gerade der Blick auf das allgemeine und der auf das tägliche Leben zeigt uns, daß wir hinzufügen, wegnehmen können usw., ohne bestimmte Zahlgrößen vor uns zu haben, und dies ist das Gebiet, auf dem wir unsern Kindern diese Tätigkeiten nach ihrem wesentlichen Inhalt — d. h. begrifflich — beibringen.

Einige Beispiele, zunächst aus der kindlichen Erfahrung: Die Suppe schmeckt nicht recht, die Mutter tut noch etwas Salz hinzu (sie fügt es hinzu, sie fügt eine Messerspitze, einen Kaffeelöffel voll hinzu); sie tut ein Stück Butter an das Gemüse, gibt noch ein wenig Essig an den Salat. Die Kinder sind noch nicht satt zu Mittag, sie möchten noch etwas Gemüse bekommen; auch noch zwei Kartoffeln dazu; nun haben sie mehr, für die Kleinen war es erst schon genug. Es ist nicht genug Öl auf der Lampe, die Mutter muß zugießen; das Feuer im Küchenofen will ausgehen, sie muß Preßkohlen zulegen. Beim Milchmann ist das Litermaß noch nicht voll, beim Kaufmann wiegt die Wage noch nicht, sie müssen beide noch etwas zugeben. Beim Buchbinder kriegt man zu einem Schreibheft eine Feder zu. Es regnet wochenlang, das Wasser vermehrt sich. Die Eierhäufchen an den Kohlblättern lassen erkennen, wie sich die Schmetterlinge vermehren ... Oder aus dem Tun der Kinder: Zwei Verse können wir von dem Sommerlied, wir wollen noch einen dazu lernen. Wir haben 6 Kinder auf die Tafel gemalt, wir wollen noch mehr dazu malen. Wieviel Vögel, Steine, Kreisel, Bälle, Früchte, Kartoffeln usw. habt ihr gemalt? Fügt jedes noch mehr, noch 5 hinzu! Neben dem Malen gibt das Spiel Veranlassung zum Hinzutun: Auf dieser Seite stehen zu wenig Kinder, da müssen noch 2 mehr sein! Oder das Sammeln von allerhand Dingen, Eicheln, Kastanien, anderen Früchten, Samen, Federn, Metall usw.[2], bei denen alle dazu beitragen, es zu vermehren. Das sind Augenblicks-

[1] So fragten mich Kinder des 3. Schuljahres, als das Rechenbuch solche Aufgaben brachte, was es hieße: vermehre, vermindere, Unterschied, enthalten, beträgt, das Vierfache, fortgesetztes Zulegen usw.

[2] Die zunächst selbst als Lehrmittel dienen, bei genügender Menge aber auch dazu, bessere Lehrmittel, etwa einen Lichtbilderapparat anzuschaffen, den dann die Kinder selbst erworben hätten.

bilder aus der **Addition des Lebens**, bei der die Kinder beobachtend und selbsthandelnd tätig sind, aber auch angeleitet werden, je nach Stoff und Umständen sich anders auszudrücken: hinzufügen, zulegen, zugeben, dazutun, zugießen usw. und bei alledem sich vorzustellen, wie eine vorhandene Menge vermehrt wird.

Wenn es beim Kirschenkaufen zuviel wiegt, nimmt der Händler ein paar wieder weg. Wo viel Mäuse sind, hält man eine Katze; sie soll sie vermindern. Mit Leimbändern und Glasglocken vermindern wir auch die lästigen Fliegen, die sich so stark vermehren. Der Schmutz wird weggekehrt, die Aschengrube wird entleert, der Schornstein gefegt: was uns stört oder zuviel ist, müssen wir vermindern. Die Blumen werden abgeschnitten, die Felder abgeerntet, das Obst abgepflückt, die Eier den Hühnern weggenommen; die weichen Pflaumen werden ausgesucht, auch teigige Birnen, fleckige Äpfel und keimende Kartoffeln. Überdies vermindern sich alle unsere Vorräte im Gebrauch. Das Frühstücksbrot in der Schule wird rasch weniger, der Bleistift schreibt sich ab, die Tinte im Glase und die Kreide vermindern sich fortwährend. Wenn nicht genug Platz auf der Tafel ist, löschen wir einige der Bilder weg. Beim „Bauen der goldnen Brücke" wird die Reihe der Kinder jedesmal kleiner, ebenso vermindert sie sich bei der „schwarzen Köchin". Das ist die **Subtraktion des Lebens**.

Das **Zerlegen** lernen die Kinder, indem sie angeleitet werden, sich jederzeit Rechenschaft zu geben über die **Teile** eines **Dinges** und zugleich über den Zweck der Teile, ohne den das Interesse für die Teile in der Luft hängt. Man vergegenwärtige sich das und übe es mit den Kindern an Kirschen, Birnen, Nüssen, Kartoffeln, Möhren, Schneeglöckchen, Sonnenblumen und anderen passenden pflanzlichen Erscheinungen, an Haustieren und wilden Tieren, an Tür und Fenster, Tisch und Ofen, Messer und Gabel, Kinderwagen und Schlitten, Fahne und Kreisel usf. Fischessen, Schweineschlachten, Ausnehmen einer Gans, Lampen vorrichten, Betten machen, Kleider reinigen sind Beispiele aus der häuslichen Erfahrung. Dabei handelt es sich überall nicht um ein Verteilen, sondern ein Zerlegen in die Bestandteile, ein Bewußtwerden ihrer Art und Eigenheit.

Das **Vergleichen** wird ohnehin schon in fast allen Stunden getrieben; auch quantitativ soll es geschehen und als solches zum Bewußtsein kommen. Wir vergleichen auf der Wiese die Größe der Grashalme, die Zahl der erbeuteten Maikäfer, im Walde die Flecke, wo mehr Heidelbeeren stehen, die Größe und Kraft der Haustiere, die Größe der Kinderschlitten, der Uhren, der Kreisel, der Reifen, der Bälle, die Zahl der Ostereier, die Geschwindigkeit der verschiedenen Beförderungsmittel. Und nach dem Vergleichen setzt, so oft, als es angeht, das **Ergänzen** ein: Die Mutter gießt

die Milchtasse voll, sie füllt den Waschkrug vollends, sie ergänzt die gesparten 17 Pfennige zu 20, sie hängt die Wäscheleine noch voll, auf der noch Platz war. Der Geburtstag ergänzt die verlorenen Steine des Baukastens, und Weihnachten ergänzt die Vorräte im Kaufmannsspiel. Es handelt sich beim Ergänzen überall zuerst um den Vergleich der Wirklichkeit mit der Möglichkeit und sodann um ein Überführen der Möglichkeit in die Wirklichkeit durch Ausfüllen des Unterschiedes. Das kann in den verschiedensten Lagen des häuslichen und schulischen Kinderlebens in Betracht kommen.

Besonders wichtig ist, das Malnehmen zuerst ohne Zahlen zu lernen. Wir haben wiederholt die Erfahrung gemacht, daß nicht wenig Kinder ziemlich verblüfft waren, wenn sie erkannten, daß das rechnerische Malnehmen doch eigentlich dasselbe zu bedeuten habe wie ihr häusliches „mal": Zweimal bin ich im Walde gewesen, jedesmal habe ich Beeren gepflückt. Viermal mußten wir die Wäsche gießen, so rasch wurde sie trocken. Dreimal hat der Zug gepfiffen; vielemal bin ich schon in der Eisenbahn gefahren. Dreimal bin ich gestern auf dem Karussell geritten, einmal umsonst. Schon zweimal hat es in dieser Woche solch starken Nebel gegeben. Zwanzigmal wohl bin ich den Berg hinunter gerodelt. Zehnmal hintereinander habe ich den Ball geworfen und aufgefangen. Zweimal kommt die Butterfrau. Dreimal in der Woche werden die Schulzimmer gekehrt; ein Kind ist zweimal zu spät gekommen, das eine Mal hatte es sein Frühstück verloren; dreimal haben wir heute schon die Klasse gezählt usf.

Auch das Verteilen wird in der Schule wirklich ausgeführt: Verteile diese Stückchen Plastilina, verteile die Kreide, verteile diese Papierblätter, verteile die Legestäbchen, die Perlen, die Pfennige! In der Schule und im Walde werden die Plätze verteilt, und zu Hause verteilt die Mutter die Suppe, das Gemüse, das Fleisch, die Erdbeeren. Zu Weihnachten werden Nüsse verteilt, und zur Kindtaufe Zuckertüten, und in der Kirche zur Weihnachtsfeier schöne Bilder oder Kalender. Die Zeitungsfrau verteilt die Zeitungen und der Mann die Extrablätter usw.

Wir messen auch mit allerhand Maßen: die Suppe mit dem Schöpflöffel, die Arznei mit dem Teelöffel, den Kaffee mit dem Blechlot, die Pferdeleine mit Spannen, die Zahlinge mit Daumenbreiten, den Spielkreis und das Schulhaus mit Schritten. Die großen Leute messen die Wärme mit dem Thermometer, das können manche Kinder auch schon, auch die Kälte messen sie so; sie messen die Stunde mit der Uhr und das Hochwasser mit dem Wassermaß. Daneben können Meter und Zentimeter neben Pfund und Dutzend schon frühzeitig an das Kind herangebracht werden. Auch dies Messen ist ein Vergleichen der Möglichkeit — hier der Maßeinheit

— mit der Wirklichkeit; nur daß diese hier nicht aufgefüllt, sondern daß lediglich die Funktionszahl gesucht wird.

Das Zerlegen in Faktoren endlich — wir berühren es aus besonderen Gründen hier zuletzt — hat seine Parallele ebenfalls im täglichen Leben, auch in dem der Kinder. Wie das Zerlegen in Summanden vorgebildet ist und vorbereitet wird in dem zerlegenden Betrachten der Dinge und ihrer Teile, so wird das Zerlegen in Faktoren vorgebildet durch zerlegendes Betrachten der Erscheinungen und ihrer Ursachen — man erinnere sich der Funktionalzahl und Substantialzahl! So z. B.: Daß das Thermometer in die Höhe geht, kommt von der zunehmenden Wärme; daß das Mühlrad sich dreht, das bewirkt der Wind oder das Wasser; daß der Teich gefriert, rührt her von der Kälte; daß wir Durst bekommen, vom langen Laufen. So werden auch analysierend betrachtet Sonne, Baum und Schatten; Schnecke und Salat; blakende Lampe, Ruß im Zimmer und schwarze Nasen und was sich sonst noch für diesen Zweck auswerten läßt.

Wir fassen zusammen. Ist denn dies Rechnen? Rechnen im üblichen Sinne allerdings nicht, aber es gehört mit zu den ersten und unentbehrlichsten Grundlagen mathematischer Bildung. Wie es zur Erwerbung der Zahlbegriffe nötig ist, Zahlauffassung und Darstellung in vielfacher Wiederholung zu üben, so ist auch eine Operationsauffassung und -darstellung nötig, die zunächst ohne Komplikationen und Erschwerungen erscheinen muß. Wollen wir unsere Kinder anleiten zum Operieren mit reinen Quantitäten, so müssen sie dies Operieren erst völlig beherrschen im Gebiete des Handgreiflichen, des Konkreten, der Sachvorstellung. Der achtsame Leser hat gewiß bemerkt, wie in den Beispielen neben dem eigenen wirklichen Handeln und Ausführen des Kindes auch die Erinnerung zu ihrem Rechte kommt und den Übergang bildet zu anfangs schwächeren, dann immer stärkeren Abstraktionen. Doch sei auch an dieser Stelle davor gewarnt, sich etwa auf die Erinnerung zu verlassen. Die Erkenntnis von der Wichtigkeit der Bewegungsempfindung für diese Seite der geistigen Entwicklung und die Erkenntnis von der Unzuverlässigkeit der kindlichen Erinnerung weisen den rechten Weg. Es gilt hier wie in vielen anderen Fällen: Das eine tun und das andere nicht lassen.

Sodann läßt sich noch eine andere Erkenntnis aus den mitgeteilten Beispielen gewinnen. Weil das „eigentlich kein Rechnen" ist im Sinne der alten Schule, sondern Anschauungsunterricht, so geht daraus hervor, einmal, daß der Anschauungsunterricht mathematische Aufgaben zu übernehmen und zu lösen hat, und sodann, daß das „eigentliche Rechnen" erst einsetzen darf, wenn ein solcher Anschauungsunterricht weit genug vorgearbeitet hat. Wann dieser

Zeitpunkt am zweckmäßigsten anzusetzen ist, das ist aber eine Frage, die in einem späteren Abschnitt behandelt werden soll.

Zwischen der ersten Aufgabe, in den Sinn der Operationen in gefühlsbetonter und eigentätiger Weise einzuführen, und der zweiten, die Operationen mit Betonung ihrer Ergebnisse anzuwenden an Zahlen, steht noch eine Übergangsstufe, die durch ein Beispiel gekennzeichnet werden möge: Ein Haufen Kinder geht zum Schützenfest (wir zählen sie nicht, jedes Kind symbolisiert sie aber durch Stäbchen, Perlen, Steinchen oder andere Rechendinge). 3 bleiben an der Pfefferkuchenbude stehen, 5 an der Würfelbude. Die anderen gehen weiter; von jenen 3 läuft eins hinter dem Schwarme her und holt ihn ein. Nun stellen sich 10 ans Karussell usf. Das alles wird dargestellt, die Operationen werden also auch zahlenmäßig ausgeführt, ohne daß jedoch das Ergebnis in Betracht käme. Ein Hinweis darauf wäre es, wenn jedesmal festgestellt würde: Nun sind es hier weniger, nun wieder mehr usf. Als Übergangsstufe bedarf das Ganze gemeinhin keiner besonders starken Übung. Man beobachtet die Kinder, die schwächsten besonders, und merkt, ob man weiterschreiten kann.

§ 25. Addition und Subtraktion.

Sind die rechnerischen Operationen soweit vorbereitet, so können sie nun auch mit Hinzunahme des zahlenmäßigen Ergebnisses betrieben werden. Wir empfehlen dabei, Addition und Subtraktion zusammen zu nehmen. Da die erste Form auch der folgenden Übungen darin besteht, den wirklichen Vorgang an wirklichen Dingen auszuführen, und da der Sinn der beiden Operationen infolge der früheren Übungen als völlig erfaßt vorausgesetzt werden muß, so ist dies Zusammennehmen von Addition und Subtraktion von vornherein möglich. Andererseits sieht man, daß der nunmehrige Betrieb sich gar nicht sehr von dem vorhin erläuterten Beispiele unterscheidet[1]. Es wird eben überall das Ergebnis hinzugefügt, also — um das vorige Beispiel nochmals heranzuziehen: 20 Kinder gehen zum Fest; die letzten 3 (um das Zählen zu erleichtern) bleiben stehen, nämlich das 20., das 19. und das 18. Kind. Nun sind noch 17 beisammen. Beim nächsten Male bleiben 4 stehen, nämlich das 17., 16., 15. und 14. Kind; sind noch 13 beieinander. 15. Nun mögen sich zwei hinzugesellen, sie bilden jetzt das 14. und 15. usw. Natürlich kann auch das 1., 3., 10. stehen bleiben, und

[1]) Das Beispiel kennzeichnet eigentlich schon die folgende Form, die wirkliche Ausführung der Operation an den Symbolen für die Dinge. An dieser Stelle wird es kaum nötig sein, die eigentlich erste Form, welche das Ausführen der Operation an Dingen verlangt, noch näher darzulegen.

es mag gelegentlich so ausgeführt werden. Aber dann nehmen eben andere Kinder die frei gewordenen Plätze ein. So gelangt das Kind — wiederum nicht sprungweise, sondern allmählich — zu der Erkenntnis, daß es sich bei den betreffenden Zahlenangaben nicht um eine unabänderliche Reihenfolge der Einzeldinge handelt, sondern immer nur um die Größe der Gesamtheit.

Eine bedeutsame Erscheinung fällt dabei ins Auge. Während bei den bisherigen Übungen überall die Grundzahlen ausreichen, treten hier die Ordnungszahlen hinzu. Grund- und Ordnungszahlen gleich zu Anfang in buntem Durcheinander zu bieten, das hieße wiederum, zwei Schwierigkeiten auf einmal zu überwinden verlangen. Hier aber ist eine passende Stelle, um die Ordnungszahlen einzuführen, zumal ja Zahlauffassung und Operationsbegriff genügend vorbereitet sind. Beides wird überdies noch berücksichtigt durch die einzelnen Teilstufen, in welche wir die Behandlung der Addition und Subtraktion gliedern.

a) Addition und Subtraktion von 1 bis 4 (5) an Dingen und Symbolen.

Sie erfolgt zunächst und längere Zeit hindurch lediglich zählend, und zwar aufzählend und abzählend. Damit ist zugleich gegeben, daß diese Übungen sich zunächst alle in der Zahlenlinie bewegen. Endlich geht aus der Größe der Operationszahl, die zu übersehen ist, und aus dem übersehbaren Auf- und Absteigen hervor, daß die Überschreitung des Zehners hier gar keine Schwierigkeiten macht, also unbedenklich mit hinzugenommen werden kann. Damit werden Schritte, denen im bisherigen Rechenunterricht eine außerordentliche Wichtigkeit beigemessen und denen daher eine lange Übung gewidmet wurde, zu einem Teile fast spielend bewältigt, zum anderen in zweckmäßigster Weise vorbereitet. Einige Beispiele mögen Gang und Eingliederung veranschaulichen.

1. Die Mutter hat Geburtstag. Grete holt von der Wiese einen feinen Blumenstrauß, und weil sie schon gut zählen kann, zählt sie die Blumen, die sie pflückt: 3 weiße Margaretenblumen — die malen wir, aber nicht zu groß, und alle in eine Reihe — und 3 blaue Glockenblumen ... (Kinder: Nun hat sie 6) ... und 2 rote Nelken ... (nun hat sie 8) ... und 3 gelbe Butterblumen ... (nun hat sie 11) ... und 4 Vergißmeinnicht ... (nun sind es 15) ... und noch 3 Nelken ... (die Kinder malen ganz schematisch — es genügen bei späteren Übungen auch Striche oder Ringel — und nennen jedesmal das Ergebnis) ... o, da findet sie noch 3 Stengel Zittergras ... und noch 2 Gretenblumen ... und noch 3 Vergißmeinnicht ... (da hat sie 26 Blumen im ganzen). Stimmt's? Zählt

nach! Wer möchte auch einen Blumenstrauß pflücken? Und die Kinder bilden nun selbst solche Aufgaben.

2. Hans hat eine Sparbüchse bekommen, und der Vater hat ihm 3 ganz neue goldige Pfennige gegeben, damit er sie hineintun kann ... Malen! ... Die Mutter findet auch noch 2 ... (Ergebnis nach jeder Änderung!) ... Hans ist sehr froh; er zeigt die neue Sparbüchse der Tante, die hat auch 1 Pfennig übrig ... er geht für die Nachbarin einen Weg und bekommt 2 Pfennige ... er holt ein Schreibebuch für den großen Bruder, und weil der noch den alten Umschlag hat, kostet es bloß 9; den Pfennig, den er wiederbekommt, darf er behalten ... Erzählt weiter! ... Nun kommt Martins Sparbüchse dran.

3. Fritz hat seine Soldaten aufgestellt, 22 Stück. Malt sie! (In Strichen.) Er hat eine Erbsenkanone und schießt: 3 sind gefallen (die löschen wir nicht weg, die streichen wir bloß aus, damit wir uns nicht versehen) ... beim nächsten Schuß fallen 2 ... beim nächsten 4 ... beim folgenden bloß 1 ... Schießt weiter! Nun kommt ein anderes Regiment dran.

4. Lotte hat eine Tüte Haselnüsse bekommen, 36 Stück. Malt sie! (In Ringeln und — je nachdem die Übungen dagewesen sind — rhythmisiert.) Sie gibt dem Vater 3 ... (Ergebnis feststellen.) und der Mutter 3 ... dem Max 3 ... und 3 ißt sie selber. Den nächsten Tag kriegt jedes 2, also erst der Vater ... dann die Mutter ... dann der Max ... dann die Lotte. Nachmittags kommt die Frieda, die kriegt auch 2, ... dabei muß Lotte auch 2 essen ... Erzählt weiter! Nehmt eine neue Nußtüte her!

5. Auf dem Spielplatze spielen 6 Kinder am Sandhaufen. Malt sie! (Schematisch, Striche mit Köpfen.) ... Da kommen noch 4 Mädchen und spielen Ball ... 3 Jungen bringen ihre Reifen ... Nun kommen noch 2 Kinder mit dem Kreisel ... Vom Sandhaufen laufen 2 fort ... Ein Mädchen hat sein Taschentuch vergessen ... Dann kommen 4 Kinder, die wollen Soldaten spielen ... 2 zanken miteinander und laufen nach Hause ... Erzählt weiter!

6. Die Mutter hat große Wäsche. Martha hilft mit aufhängen. Zuerst kommen 10 Taschentücher dran. Malt sie! Dann 10 Strümpfe ... dann 2 Hemden ... dann haben noch 3 Handtücher Platz ... Nun kommen 4 Bettücher hinzu ... dann 4 kurze Strümpfe und 4 lange Strümpfe usw. Eine Menge Wäsche hängt nun schon auf dem Trockenplatze, aber noch nicht alle. Von den Taschentüchern sind 3 trocken geworden ... An dieser Stelle haben 4 Strümpfe und 2 Handtücher Platz ...

7. Die Kinder rodeln mit ihren Schlitten (mit Legestäbchen oder Strichen darzustellen). Es kommen 4 Jungen und ziehen ihre Schlitten den Berg hinauf ... dann kommen 3 Mädchen hinzu ...

Sie wollen auszählen, wer zuerst fahren soll, aber Karl setzt sich, und hui! geht's los... Nun kommen noch 2 herunter... (da sind oben noch 4, unten 8)... Kommen noch 2 Kinder dazu mit ihren Schlitten... 2 fahren herunter... 3 ziehen hinauf... 2 neue kommen von drüben herüber und stellen sich oben dazu... usf.

8. Als die Straßenbahn unten am Eiskeller abfährt, sitzen 6 Leute drin. An der Mathildenstraße steigen noch 4 ein... (Ergebnis!), am Kreuz noch 3... an der Kaiserin-Augusta-Straße wieder 2... an der Kirche 4... an der Kronprinzstraße steigen 3 aus... an der Albertstraße noch 4... Der Schaffner will sehen, ob sein Geld stimmt. Er zählt 19 Groschen. Stimmt's? Wer kann ihm rechnen helfen? (Die Ausgestiegenen darf er jetzt nicht wegzählen, die haben auch bezahlt.)

Wie man ohne weiteres sieht, sind die Beispiele 1 und 2 von der Formel a+b+c..., die Beispiele 3 und 4 von der Formel a−b−c−d..., die Beispiele 5—8 endlich von der Formel a+b−c+d−b..., wobei Abänderungen möglich sind in der Weise, daß zwei verschiedene Summen in Wechselwirkung zueinander gebracht werden (7) oder daß die positiven oder die negativen Glieder allein noch eine weitere Aufgabe bilden (8).

Die bisherigen Übungen bewegten sich immer noch in der Zahlenlinie, wenn auch die Zählung überall, wo es anging, sich rhythmisch gestaltete. Nehmen wir an, daß inzwischen die Übungen im Auffassen von Zahlen mittels des Überblickens und im entsprechenden Darstellen eingesetzt haben und ein gutes Stück gefördert worden sind, so steht nichts im Wege, dann auch die Additions- und Subtraktionsübungen nicht nur in der Zahlenlinie, sondern auch im Zahlbilde vornehmen zu lassen. Wir können da noch längere Zeit bei solchen Übungen verweilen, wie sie durch die obigen acht Beispiele angedeutet worden sind. Und doch bringt das Hantieren mit den Zahlbildern einen neuen Zug in diese Übungen. Er besteht in der energischen Betonung des Zehners. Wenn die Rechnung verlangt 18+4, so bleibt gar nichts anderes übrig, als zunächst nur 2 hinzuzufügen, d. h. den Zehner voll zu machen. Und ebenso ist es bei der Aufgabe 22−3; hier können zunächst nur 2 Punkte entfernt werden, d. h. wir gehen auf den Zehner zurück.

Die technische Ausführung der Addition und Subtraktion ist leicht zu bewerkstelligen, solange wir in der Zahlenlinie uns bewegen. Die einfache und selbst die rhythmisierte Reihung von Rechendingen, das malende Darstellen von Strichen und Ringeln als Darstellungssymbolen erfolgt so rasch, daß der Zeitaufwand nicht ins Gewicht fällt. Anders bei den Zahlbildern. Hier ist rasches

Überblicken in nicht geringem Grade abhängig von der klaren und deutlichen Darstellung der Rhythmisierung. Gerade die Erfahrung, daß kleinere Kinder diese Schwierigkeit nur mit viel Zeitaufwand und in nur bedingter Weise zu bewältigen vermögen, hat bewirkt, daß in unserer Praxis ein sonst vorzügliches Rechenlehrmittel, das wirkliche Geld, mehr und mehr zurückgetreten ist. Sie hat wesentlich dazu beigetragen, den Kindern fertige Zahlbilder in die Hand zu geben. Am geeignetsten erwies sich für den vorliegenden Zweck folgende Form. Die Hundertertafel wurde auf Karton gedruckt, und zwar zwei Stück für jedes Kind. Diese beiden Tafeln wurden nun zerschnitten, so daß 4 mal das Zahlbild der 20, 3 mal das der 10, 2 mal das jeder Zahl von 9 bis 1 entstanden und also jedem Kinde in die Hand gegeben werden konnten. Damit lassen sich alle Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 100 mit wenig Griffen ausführen. Bei der Aufgabe 37+4 hat das Kind mit 3 Griffen das Zahlbild der 37 hingelegt. Dann muß es, um den Zehner voll zu machen, die fehlende 3 hinzufügen — eine 4 an dieser Stelle paßte gar nicht in den freien Raum und würde auch sonst das ganze Bild stören — und endlich ist noch die 1 anzusetzen. Soll es aber von diesen 37 z. B. 3 wegnehmen, so deckt es zunächst 3 zu, „denkt" sich diese 3 weg, entfernt die 7 und legt sofort eine 4 hin. Wird verlangt, von 20 eine 4 wegzunehmen, so muß tatsächlich „gewechselt" werden: das Zahlbild der 20 wird eingetauscht, ausgewechselt gegen die drei der 10, der 6 und der 4. Nun kann die 4 wirklich weggenommen werden.

Jedes Kind ist dabei tätig. Diese Ausführung, und zwar seitens aller Kinder zu gleicher Zeit, ist eine bedeutsame Hauptsache. Nicht das Sehen, auch nicht sehr oftmaliges Sehen hat diesen Erfolg wie das Greifen, das ja das Sehen zur Voraussetzung hat. Aber es ist für das Kind eine völlig andere innere Lage, ob es nur sehen, nachsehen soll, ob ein anderes es richtig bringt, oder ob es die geforderte Leistung selbst liefern darf. Es ist nicht uninteressant, den Unterschied der kindlichen Seele und Gefühlsrichtung und der des gebildeten Erwachsenen auch in dieser Beleuchtung zu sehen. Für den gewöhnlichen Typus des höher gebildeten Erwachsenen ist die „Inspektion" das weitaus mehr Gefühlsbetonte und darum höher Bewertete, man denke an inspizierende Funktionäre auf allen Gebieten menschlicher Tätigkeit, an Direktoren aller Art, Inspektoren, Offiziere u. v. a.[1]). Dem Typus des normalen Kindes kann aber die inspizierende Tätigkeit nicht zusagen, es will selbst schaffen. Im Selbstschaffen entwickelt es

[1]) Womit natürlich nicht ausgeschlossen ist, daß sie alle neben der inspizierenden auch schöpferische Funktionen haben. Aber die beiden sind auseinander zu halten.

seine Kräfte, im Selbstschaffen ergibt sich auch der höchstmögliche Lernerfolg. Es kommt darum überall darauf an, daß wir Einrichtungen schaffen, welche dem Kinde Gelegenheit zum Selbstschaffen geben und jene inspizierende Tätigkeit an zweite Stelle rücken. Und für den vorliegenden Fall bezeugt auch die Erfahrung eine wesentliche Erleichterung und Förderung der Lerntätigkeit durch die Einrichtung, den Kindern Zahlbilder in die **Hand** zu geben. Wir können uns eigentlich nur darüber wundern, daß dieser einfache, auf der Hand liegende Gedanke nicht längst verwirklicht worden ist.

An dieser Stelle sei auch bemerkt, daß diejenigen Methodiker sich im Irrtume befinden, die von den Zahlbildern eine **völlig starre Ansicht** verlangen, die z. B. den Bornschen Zahlbildern vorwerfen, sie seien weniger gut brauchbar, weil beispielsweise das Zahlbild der 5 einmal so ⁘, gelegentlich aber auch so ⁘ aufträte, während es in anderen Zahlbildreihen die unverrückbare Form ⁘ hätte. Gerade die praktischen Erfahrungen mit den ausgeschnittenen Zahlbildern haben uns gezeigt, daß das Drehen und Wenden der von uns verwendeten Zahlbilder — wie es bei den ungeraden Zahlen sich nötig macht — tatsächlich ein gewisser Vorzug ist, der die Beweglichkeit der Vorstellung noch erhöht.

Wiederholt sei betont, daß die Nachprüfung aller solcher Rechnungen immer nur durch Auszählen möglich ist, daß aber dies Auszählen je nach der kindlichen Kraft sich immer mehr rhythmisiert und verkürzt.

b) Addition und Subtraktion von 5 bis 10 an Dingen und Symbolen.

Es ist leicht einzusehen, daß wir schon bisher unter die Zahlen, welche zugezählt oder weggenommen werden sollten, in geeigneten Fällen auch Fünfen mengen können. 25—5 macht eben gar keine Schwierigkeiten, auch 21+5 geht noch, ist aber schon anders geartet. Gerade diese beiden Beispiele zeigen, daß die nächste Übungsstufe schon höhere Anforderungen an das Kind stellt als die vorige, auf der wir mit überblickbaren Operationszahlen hantierten. 5 ist ja noch zu überblicken, aber eine Zusammenstellung mit 5 schon nicht mehr so leicht. Ehe wir daher dazu übergehen, auch 6 bis 10 und größere Operationszahlen in unsere Additions- und Subtraktionsübungen einzuführen, ist es nötig, als **Zwischenübung** zu treiben das **Zerlegen** und **Vergleichen**. Beide Tätigkeiten sind, wie wir uns erinnern, nicht in demselben Sinne operativ wie Addition und Subtraktion; wir nannten sie deshalb ruhende Beziehungen. Darum hat ja auch die Mathematik keinen beson-

deren Ausdruck für sie und behilft sich mit den Ausdrucksformen der Addition und Subtraktion. Aber sie haben ihren großen Eigenwert in ihrem durchaus selbständigen logischen Charakter. Es ist deshalb ein Fehlgriff mancher Methodiker, wenn sie das Zerlegen z. B. als umgekehrte Schreibung der Addition auffassen lassen wollen. Dadurch bringt man nicht Klarheit in die Köpfe, sondern Verwirrung. Diese beiden Hilfsoperationen brauchen wir nun für die Addition und Subtraktion der Zahlen etwa von 5 an.

Man könnte sagen, wir hätten sie eigentlich schon früher gebraucht, und eine pedantische Rechenmethodik hat sich bemüht, auch die Zahlen 2, 3 und 4 in vielen Übungen zerlegen zu lassen. Unsere Erfahrungen haben uns gezeigt, daß Übungen wie „2 Äpfel sind's, einer und noch einer", wertlos sind, weil sie Wortübungen bleiben auf der Stufe, der die Auffassung der überblickbaren Zahlgrößen noch Schwierigkeiten macht, auf der folgenden aber Langeweile erzeugen, und zwar beides, weil weder dort noch hier das Kind in diesen Übungen einen praktischen Zweck zu entdecken vermag, nur den: du mußt es lernen. Aber die Zerlegung von 2 bis 4, teilweise auch noch von 5, läßt sich nach den bisher dargestellten Übungen voraussetzen, ohne daß sie besonderes Unterrichtsziel gewesen wäre.

Wie gestalten sich nun die Zerlegungsübungen für die folgenden Zahlen? Sie machen nicht die geringsten Schwierigkeiten, wenn wir als Erzieher uns klar sind über Art, Bedeutung und Gestaltung, den Kindern gegenüber aber sie als gewissermaßen notwendig herauswachsen lassen aus den bisherigen Übungen, der Addition und Subtraktion von 1 bis 4, die allerdings — wie wir voraussetzen müssen — bis zu einer gewissen Sicherheit geführt worden sind. Wenn das der Fall ist, können wir ohne weiteres beginnen mit Aufgaben wie 18 + 6. Die Kinder legen die 18 aus 10 und 8, sie machen (wie vorher bei 18 + 4) erst den Zehner voll und fügen noch 4 hinzu. Der ganze Unterschied gegenüber den früheren Übungen besteht darin, daß der Zerlegungssatz noch besonders zum Ausdruck kommt und angefügt wird. Z. B. „18 Kinder stellen sich an ... 10 und noch 8; nun sollen sich noch 6 dazustellen; da kommen hierher noch 2 und die anderen 4 hier hinüber; zu 6 gehören 2 und noch 4."

Auf diese Art bekommen die Zerlegungsübungen Sinn; ihre Zweckmäßigkeit und Notwendigkeit wird unmittelbar erkannt, kommt sogar schon den Kindern dieser Stufe leise zum Bewußtsein. Folgende Beispiele vertreten jeweils die ganze Übungsgruppe bis zu 100:

a) 9 + 5 (dazu auch 19 + 5, 29 + 5, 39 + 5 usw.)
8 + 5
7 + 5
6 + 5

b)	c)	d)	e)
$9+6$	$9+7$	$9+8$	$9+9$
$8+6$	$8+7$	$8+8$	$8+9$
$7+6$	$7+7$	$7+8$	$7+9$
$6+6$	$6+7$	$6+8$	$6+9$
$5+6$	$5+7$	$5+8$	$5+9$
	$4+7$	$4+8$	$4+9$
		$3+8$	$3+9$
			$2+9$

Damit sind 300 Übungsbeispiele gegeben, die der Lehrer allerdings überblicken muß, um die Übung in geeigneter Weise zu leiten. Sie sind zu dem Zwecke in diese übersichtliche Zusammenstellung gebracht, die etwa so gekennzeichnet werden kann: Sie stellt eine Art monographischer Zahlenbehandlung dar[1]), indem erst die 5, dann die 6 usw. in allen möglichen Zerlegungen auftritt. Eine andere Zusammenstellung würde sich ergeben, wenn man die gleichen Ergänzungen in Betracht zieht, also

$9+5$ ($19+5$, $29+5$ . .)	sodann $8+5$	$7+5$
$9+6$	$8+6$	$7+6$
$9+7$	$8+7$	$7+7$ usw.
$9+8$	$8+8$	$7+8$
$9+9$	$8+9$	$7+9$

Mit diesen beiden Zusammenstellungen ist nicht gemeint, daß der Unterricht so, wie sie hier stehen, seinen Gang nehmen müsse; das scheint allerdings die Annahme manches Rechenbuchverfassers zu sein. Vielmehr werden die einzelnen Unterrichtsbeispiele sich ergeben aus der Sachbetrachtung, der psychischen Entwicklung der Kinder und dem raschen Überblick des Lehrers über den Stoff, wobei das Moment der kindlichen Entwicklung die Bedingung, der Stoffüberblick die Ausdehnung, die Sachbetrachtung die Veranlassung und den äußeren Rahmen der Übung darstellt. Dabei ist wiederum nicht ausgeschlossen, daß man auch ganze Teile der Reihen zu Übungszwecken verwendet.

Einem flüchtigen Leser mag es vielleicht auffallen, daß wir nicht auch die Zehner zerlegen lassen, was doch das allerwichtigste sein müßte. Wer aber unsere Ausführungen sich recht plastisch vorstellt oder sie praktisch nachprüft, wird merken, daß wir besondere Übungen für die **Zerlegung des Zehners** gar nicht nötig haben, weil wir ja ununterbrochen den Zehner — allerdings nicht so oft zerlegen, als vielmehr immer und immer wieder **ergänzen** lassen. Wer die obigen Reihen in diesem Sinne prüft, wird sehen,

[1]) Oder vielmehr das vom tauben Gestein befreite Goldkorn der monographischen Methode.

daß wir bei 300 Aufgaben 40 mal die 5 zerlegen lassen, 50 mal die 6 usw., aber jedesmal, d. h. 300 mal, die 10. Die Zerlegung des Zehners erfährt also die notwendige Einübung mit dem ihr gebührenden Gewicht.

Sind also mit den angedeuteten Beispielen Übungen der zweiten Hilfsoperation, des Vergleichens und Ergänzens, eigentlich schon in genügender Ausdehnung gegeben, so soll doch noch darauf hingewiesen werden, daß sie auch selbständig auftreten können. Einige Beispiele werden hier genügen: Wir brauchen 6 Kinder zu jeder Ballabteilung, hier sind erst 4! Oder: Sind alle Kreidestückchen abgegeben? Zählt sie! 37. Wieviel Kinder waren da? 39, da fehlen noch 2. Oder: Nehmt die Zahlenbilder zur Hand! Wir stellen 17 Soldaten auf, darunter 19. Vergleicht! Oder: Vergleicht die 26 mit der 36, die 35 mit der 55, die 12 mit der 52, die 18 mit der 36. Hier können auch die Nachbarn vergleichen, was jedes auf seiner Hundertafel aufgedeckt hat.

Mit der Behandlung der Hilfsoperationen des Zerlegens und Vergleichens haben wir uns eigentlich schon immer in dem Übungsgebiet bewegt, das wir in diesem Abschnitt darzustellen beabsichtigen. Doch soll noch an einigen Beispielen gezeigt werden, in welcher Beziehung die hierher gehörigen Rechenübungen typisch sind. Da lassen sich zunächst alle die Beispiele des vorigen Abschnitts — und jedes Beispiel vertritt doch eine große Anzahl gleichartiger und ähnlicher — verwenden, wenn man die entsprechenden größeren Zahlen benutzt. Also das mit dem Blumenstrauß wie das mit der Sparbüchse, das mit den Soldaten wie das mit den Nüssen. Auch das Beispiel von der Wäsche ist leicht für größere Zahlen einzurichten. Ähnliche Rechenveranlassungen liefern uns die Sachgebiete der Feuerwehr (Feuerwehrleute, Schutzleute, Radfahrer kommen und gehen, Neugierige stellen sich dazu . . .), der Schlittschuhbahn, des Eisenbahnzuges, des Karussells usw. Besonders ausgiebig ist auch das Würfel-, das Domino-, das Kegel- und das Kartenspiel. Wie bei allen derartigen Rechnungen werden die Operationen in Zahlsymbolen dargestellt, fast alle solche Spiele können auch wirklich ausgeführt werden. Je 3 Kinder würfeln in bestimmter Reihe; wer zuerst die 40 erreicht — nicht darüber hinauskommt —, kann bestimmt werden, hat gewonnen. Ebenso, wer von 60 (oder 80 oder 100) angefangen, zuerst bei Null oder 1 oder 20 ankommt. In derselben Weise lassen sich Dominosteine verwenden. Natürlich können es auch statt Gruppen von 3 Kindern mehrere wetteifernde Abteilungen sein. Es ist das eine Form des Wettrechnens, bei der keins zu schlecht wegkommt. — Um das Kegeln in ähnlicher Weise zu einem Wettbewerb zu gestalten, braucht man nur 9 Blättchen mit den Ziffern 1 bis 9 — auch

0 und 10 kann man hinzunehmen —, die nun von den einzelnen Kindern nach Art der Lotterie aus einem Kästchen gezogen werden und als umgeschobene Kegel gelten. Zwei Abteilungen gehen gegeneinander, jedes Kind darf einmal oder dreimal kegeln. Welche wird gewinnen? — Das Kartenspiel wird ganz so gestaltet wie das Würfel- oder Dominospiel, nur daß jetzt auch 7, 8 und 9 als Werte gezählt werden. Mit der 10 und der 11 reicht es zwar in den nächsten Übungsabschnitt hinein, aber wir wollen nicht der Pedanterie zuliebe auf so anregende Übungen verzichten, zumal da auch hier „alles fließt" und kein Markstein die Entwicklung der Zehneraddition von der Elferaddition trennt.

Auf ein Gebiet, das fast unerschöpflich ist, wäre noch hinzuweisen, das sind die Erlebnisse der Geldtasche oder das Einkaufen. Jene Bezeichnung ist uns lieber, sie gestattet, die Addition und Subtraktion mehr durcheinander zu werfen: Apfelsinen, Wurzelwerk, Bücklinge, Radieschen, saure Gurken, Petersilie, Flaschenbier werden beim Grünwarenhändler geholt, Papier, Bleistifte, Gummi, Federn, Federhalter, Buntstifte, Rechenzettel, Schreibhefte beim Buchbinder. Dazwischen hinein muß die Mutter so und so oft auffüllen, und sie tut es natürlich so, daß „ein schweres Exempel" daraus wird[1]).

c) Addition und Subtraktion größerer Zahlen.

Für diesen Lehrabschnitt kann die Addition und Subtraktion reiner Zehner eine Vorstufe bilden, die aber mit unsern anschaulichen und handgreiflichen Hilfsmitteln, insbesondere der zerschnittenen Hundertertafel, bald überwunden ist[2]). Es mag dabei darauf hingewiesen werden, daß Aufgaben dieser Art sich auf verschiedene Weise lösen lassen. Die Aufgabe 17+10 (selbstverständlich zuerst konkretisiert!) kann das Kind so lösen, daß es erst den

[1]) Lang macht dazu den Vorschlag, mit Hilfe der Kinder Preistafeln in der Schule entstehen zu lassen für alle möglichen Dinge, die in den Gesichtskreis der Kinder treten. An dem Beispiel der 1 Pfennig-Preistafel zeigt er sehr hübsch, wie seine Kinder mehr als 100 verschiedene Dinge nach und nach anzugeben wußten, die alle 1 Pf. gekostet hatten. Dieser Vorschlag, den wir aufs wärmste unterstützen, läßt das Hauptgebiet des bürgerlichen Rechnens, die häusliche Wirtschaftsführung mit Preisbeobachtung und Sparsamkeitsanregungen schon früh und immer wieder an die Kinder herantreten. Er findet sich in dem trefflichen Werke „Bodenständiger Rechenunterricht." Eine Sammlung von zahlenmäßigen Angaben aus allen Gebieten des menschlichen Lebens als Hilfsbuch für den Rechenunterricht aller Schulen. Verlag Kortkamp, Hannover. Es ist nicht ein Aufgabenwerk, sondern mehr ein statistisches Nachschlagebuch, das seine Angaben nicht nach Unterrichtsstufen, sondern nach Sachgebieten ordnet.

[2]) Daß zur Anschauung zurückgegriffen werden muß, wenn bei späterer Veranlassung irgend eine Unklarheit oder Unsicherheit sich herausstellt, ist ein allgemeiner didaktischer Satz, der für alle Gebiete, darum natürlich auch für dies hier gilt.

Zehner auffüllt, also $17+3+7$ rechnet; ein anderes kann sagen: Ich rücke die 7 fort, setze die 10 dorthin und füge die 7 wieder an, gibt 27. Oder 46—10. Da nehme ich erst die 6 weg und dann noch 4, bleiben 36. Und das andere: Ich rücke 40 und 6 auseinander, nehme von der 40 die 10 weg, bleiben 30, und die 6 dazu gibt 36. Sollen wir hineinfahren und nur den einen Weg für gut und richtig erklären? Das sei ferne. Gerade durch die Mehrzahl der Wege werden dem Kinde die Beziehungen klarer. Überdies ist es ja dann, wenn mehrere Wege überblickt werden können, nicht schwer, durch den bloßen Augenschein oder durch einen Wettbewerb die Kürze und Sicherheit der Wege vergleichen zu lassen.

So selbstverständlich das Gesagte erscheint, so bildet es doch mehrere Fingerzeige für die Behandlung der Additions- und Subtraktionsübungen mit **größeren Zahlen**. Bei 48—13 sind also zwei Möglichkeiten vorhanden: Zuerst auf den Zehner zurückzugehen, also zu rechnen 48—8—5; oder die 48 zuerst zu zerlegen in $40+8$ und nun von der 40 die 10 und von der 8 die 3 abzuziehen, hier wirklich wegzunehmen. Mancher wird geneigt sein, jene erste Form als Zeitverschwendung anzusehen. Das ist aber nicht richtig, es ist vielmehr eine heilsame Übung, bei der die Zerlegung der 13 in 8 und 5 wieder ins Bewußtsein tritt. Wirksam für die Entwicklung des Intellekts und des Willens sind, wie wir gezeigt haben, Abstraktionen, die man sich selbst erworben hat. Sollten die Kinder fühlen, daß der zweite Weg kürzer ist als der erste, so würde das ein gefühlsbetontes Erlebnis sein, während die Normalverfahren des Lehrers gleich kurz- oder langweilig sind, d. h. keine Gefühlsbetonung erfahren.

Einige Beispiele mögen das noch zeigen. $33+24$. Erst den Zehner auffüllen[1]): $33+7+10+7$. Das scheint sehr umständlich; es schadet aber nichts, wenn die Kinder so zu rechnen vorschlagen. Um so größer wird die Befriedigung sein, wenn als bequemerer Weg gefunden ist: $30+3$ und dazwischen hinein $20+4$; oder $33+20$ (entsprechend der Vorstufe) $=53$, $+4=57$; oder $33+4=37$, $+20=57$.

$56+27$. Erst den Zehner auffüllen: $56+4+23$; oder gliedern wie im vorigen Beispiel $50+6+20+7=70+13=83$. Oder $56+20=76$, $+4+3=83$; oder $56+(4+3)=63$, $+20=83$. Man sieht, hier ist der erste der elegantere Weg und zudem derjenige, der am meisten dem Vergessen der Teile und Einzelergebnisse entgegenwirkt.

25—17. Erst zum Zehner zurückgehen: $25-5-10-2=8$. Hier kann man auch die 17 gleich vorn wegnehmen, bleiben vom 2.

[1]) Das würde nach der bisherigen Übung den Kindern am nächsten liegen.

Zehner noch 3, und die bleibende 5 gibt 8. Oder 25 — 10 = 15, — 7 = 8; oder 25 — 7 = 18, — 10 = 8; oder 25 — 15 = 10, — 2 = 8.

68 — 32. Erst zum Zehner zurückgehen: 68 — 8 — 20 — 4 = 36. Oder 60 — 30 und 8 — 2 = 30 + 6 = 36; oder 68 — 30 = 38, — 2 = 36; oder 68 — 2 = 66, — 30 = 36.

81 — 65. Erst zum Zehner zurückgehen: 81 — 1 = 80, — 60 = 20, — 4 = 16. Oder 81 — 60 = 21, — 1 — 4 = 16; oder 81 — 1 — 4 = 76, — 60 = 16; oder 81 — 61 = 20, — 4 = 16.

Allgemein: Wir wollen kein Normalverfahren den Kindern aufnötigen. Nicht darauf kommt es an, daß das Kind einen bestimmten Weg mit Sicherheit gehen lernt — das streben wir an bei der Gewöhnung der Pferde —, sondern daß es seinen Weg allein zu suchen und zu finden weiß. Bei der Menge des Stoffes und der „richtigen Wege", will sagen der allein gültigen Normalverfahren für die vielen Einzelgebiete, bei der zur Verfügung stehenden Zeit und bei den Kräften der Kinder kann jeder einzelne Weg gar nicht zu der Mechanisierung gelangen, die ihn vor dem Vergessen oder Verwechseln vollkommen schützte. Darum ist es besser, wir rüsten das Kind mit den mathematischen Kräften (Größen- und Operationsgefühlen usw.) aus, die es zu jenem selbständigen Wegsuchen befähigen. Sehen wir also, daß ein Kind einen ungeschickten Weg einschlägt, so wollen wir beobachten, wie die kleine Seele sich müht, die Zahlvorstellungen und die Zielvorstellung festzuhalten, um langsam an das Ziel zu gelangen. Stören wir sie nicht! Sie hat doch mit manchem Hemmnis zu kämpfen. Hier hineinfahren mit einem „So dumm!" oder „Falscher Weg!" würde das Kind nur irre machen und ihm auch dort die Sicherheit nehmen, wo es gar nicht irren kann. Selbstverständlich ist damit nicht gesagt, daß man die Kinder sich gewöhnen lassen solle an Umwege, im Gegenteil, sie sollen nur so lange Umwege geben dürfen, bis ihnen ein starkes Gefühl für die Annehmlichkeit des kürzeren Weges möglich ist. Dann kann man ihnen, wenn sie nicht von selbst darauf kommen, gelegentlich sagen: „Kinder, ich bringe es viel fixer: bei dieser Aufgabe rücke ich erst die 66 von dem Zehner weg ..." Später genügt dann schon die Anfrage: Wer kann es anders?

Es dürfte ersichtlich sein, daß es dem Geiste des kindesgemäßen Rechenunterrichts völlig widerspricht, Regeln einlernen zu lassen, etwa: Erst nehmen wir die Zehner von den Zehnern weg, dann die Einer von den Einern; oder: Erst zählen wir die Einer zu den Einern, dann die Zehner zu den Zehnern; oder gar: Wenn die Einer 10 oder mehr ergeben, machen wir erst den Zehner voll usw. Aus der Sache und dem Einzelfall heraus muß das Verfahren wachsen, das am raschesten und dabei sicher zum Ziel führt. Das Kind aber, das darüber noch nicht verfügt, überblickend und fühlend,

das mag zunächst den Weg gehen, den es überblicken kann nach der bisherigen Entwicklung seiner Kräfte. Gerade im Gelingen des Versuchs werden diese wachsen; und der Blick auf den Nachbar, der „es anders kann", wird auch Schwächere dazu aneifern, solche Versuche zu wagen. Einer Aufgabe aber von **zwei** Seiten beikommen können, heißt nichts anderes, als die Herrschaft über sie in ganz erheblichem Maße vergrößern. Sollen wir scherzhaft sagen: Die Beherrschung wächst im Quadrat der Anzahl der gefundenen Wege — oder ist diese Zahlangabe noch zu klein?

Sämtliche Aufgaben dieses Abschnitts können handgreiflich auch an dem unzerschnittenen **Hunderterblatt** dargestellt werden, wenn man noch ein zweites Deckblatt zu Hilfe nimmt, das so groß und genau so gestaltet wie das erste, aber aus durchschimmerndem Papier ist (oder Zelluloid oder Gelatine). Dieses zweite Deckblatt wird für den oberen Teil der Hundertertafel benutzt. Bei 55+28

zeigt das Kind zuerst von oben her mit dem durchschimmernden Deckblatte die 55, addiert, über die folgenden Ringel hinblickend, 5, dann 20 und zuletzt 3 und zeigt nun das Ergebnis mit dem ersten Deckblatte. Mit diesen zwei Deckblättern kann man also erst eine in Betracht kommende Zahlgröße abgrenzen, ohne daß damit der Überblick über den anderen Teil des Hunderterblattes verloren geht.

Bei der Aufgabe 32+45 deckten die Kinder erst mit dem durchschimmernden Blatte von oben her 32 ab und rechneten nun so: 32 und 5 ist 37, und 40 ist beinahe 80, nur drei fehlen dran. Andere

konnten es anders: Ich denke mir, es wären bloß 30; dazu 40, sind 70; und die 2 und die 5, sind 77.

Bei der Subtraktion fängt man mit dem undurchsichtigen Deckblatte von unten an. Bei 66—29 wird erst von unten her ab-

gedeckt, so daß nur noch 66 zu sehen sind. Dann werden 29 überblickend „weggenommen", nämlich erst 6, dann 20, dann 3; und das Ergebnis 37 wird mit dem durchscheinenden Blatte bedeckt.

Bei 58—36 rechneten die Kinder: Wenn ich gleich 38 wegnehme, bleiben 20, so aber 22. Andere: Von 50 nehme ich 30 und von 8 die 6 weg, da bleiben 22.

Dreierlei ist bei dieser Art der rechnerischen Betätigung der Kinder von Bedeutung: Daß die Operationen von **jedem** Kinde ausgeführt werden; daß jedes Kind jederzeit die **gesamte** Operation von Anfang bis Ende überblicken und sich darüber aussprechen kann; daß es aber nunmehr genötigt ist, das Hinzulegen und Wegnehmen bloß mit den Augen, **überblickend**, auszuführen, so daß es nur Anfangs- und Endzahl bestimmt.

Aufgaben für die abteilungsweise oder gruppenweise oder häusliche Betätigung der Kinder brauchen ja nicht gesucht zu werden. Doch sei darauf hingewiesen, daß auch jetzt noch Würfel, Dominosteine und Spielkarten verwendet werden können, wenn man statt des einen gleich zwei oder drei nimmt und durch sie die neue Aufgabe bestimmen läßt.

§ 26. Multiplikation und Division.

Für die Operationen der zweiten Gruppe, das Malnehmen, Teilen, Zerlegen in Faktoren und Enthaltensein sind eigentlich schon drei Arten von Vorübungen vorhanden: Übungen der **Zahlauffassung und Darstellung** in den verschiedensten Formen bis zur 2×5-Rhythmisierung, sodann die Übungen der **ersten Operationsgruppe** (Addition usw.), endlich die Übungen zur **Einführung in den Sinn der Multiplikation** und der übrigen Operationsformen, wie wir sie S. 196 ff. dargestellt haben. Auf Grund dieser Vorübungen ist es nun möglich, die Operationen dieser Gruppe verhältnismäßig leicht zu bewältigen.

Wenn man versucht, das ganze Gebiet zu übersehen, so kommt man zu dem Ergebnis, daß es sich im wesentlichen um das **kleine Einmaleins** und seine Umkehrungen handelt, ein Gebiet, von dem jedes rechenmethodische Werk behauptet, daß es die Grundlage und die wichtigste Übungsform alles Rechnens sei, besonders aber desjenigen, das der Wirtschaftsführung des kleinen und mittleren Haushaltes dient. Wenn man sich nun bemüht, diesen Gedanken an den verschiedensten Beispielen nachzuprüfen, so erkennt man, daß sämtliche Beispiele, welche das Einmaleins anwenden, Beispiele sind aus der sogenannten **Schlußrechnung**; d. h. bei all diesen Aufgaben schließt man von der Einheit auf die Mehrheit oder von der Mehrheit auf die Einheit und bei den zusammengesetzten Formen von der einen Mehrheit auf eine andere. Da nun diese Schlüsse völlig primitiver Natur sind und vor aller Rechentechnik in ihrer augenscheinlichen Richtigkeit sich aufdrängen, so ist es eigentlich nicht recht verständlich, warum unsere Rechenbücher fast durchgehends die „Schlußrechnung" etwa ins

6. Schuljahr verlegen. Selbstverständlich hat man dort besondere Fälle und Formen der Schlußrechnung im Auge. Aber man sollte mit Bewußtsein und Absicht auch die einfacheren Formen mit dieser Bezeichnung belegen. In diesem Sinne ist die **Schlußrechnung die Grundlage für die Operationen der zweiten Gruppe**. Wir gliedern die in Betracht kommenden Übungen in drei Teilstufen, da wir nochmals zwei Operationsformen zusammen behandeln.

a) Das kleine Einmaleins als Malnehmen und Enthaltensein.

Der Satz $6 \cdot 8 = 48$ ist eine Abstraktion, der alle jene konkreten Fälle zugrunde liegen, in denen die Einheit 8 sechsmal gesetzt wird. Wir werden nun, wie schon gezeigt wurde, am besten zu dieser Abstraktion führen, indem wir das Kind gewöhnen, jederzeit den konkreten Fall im Hintergrunde des Bewußtseins zu haben. Angesichts der überragenden Bedeutung, welche der häuslichen Wirtschaftsführung als Anwendungsgebiet des Rechnens vor den anderen Anwendungsgebieten zukommt, können wir die Einstellung des kindlichen Bewußtseins diesem Gebiete zuwenden und die erste und immer wiederkehrende Hauptfrage in den Übungen dieser Stufe so formulieren: Was werden kosten . . .[1]? An dieser Frage lernen also unsere Kinder das kleine Einmaleins in der Form des Malnehmens. Und neben diese erste Hauptfrage stellt sich sinngemäß sofort die zweite: Wieviel Stück bekommt man für . . .? Sie deckt die sämtlichen Übungen des Enthaltenseins. Beispiele mögen das weiter klären.

Vater, Mutter und 4 Kinder fahren auf der Straßenbahn. Was kostet es? 60 ₰. Rechne vor! Das sind 6 Leute, jede Person kostet 10 ₰, sind zusammen 60 ₰. Hast du zusammengezählt? Nein, ich weiß es auswendig. Rechnet, wieviel 4, 5, 8, 2 Personen bezahlen! Macht selber solche Aufgaben!

Überlegt: wieviel können für 30 ₰ fahren! Für 50 ₰? Kann man das auch auf dem Hunderterbilde zeigen? Gebt euch selbst solche Aufgaben! Stellt die Geldaufgaben und die Personenaufgaben durcheinander!

9 mal hat der Schaffner einen Zehner in die Tasche getan. Wieviel Pfennige gelten die? Wer recht schnell rechnen will[2]), der sagt $9 \cdot 10$ sind 90. Wiederholt! —

[1]) Neben dieser Hauptfrage gibt es selbstverständlich noch viele andere Fragen, aber im Preise einer Ware tritt den Kindern die Zahl als Einheit am leichtesten erfaßbar entgegen.

[2]) Die Kinder können und wollen dies selbstverständlich; es ist dies nur eine kindliche Anregung, auf das folgende, auf die kurze mathematische Form zu achten.

Das nächste Mal genügt die Aufforderung: Macht Straßenbahnexempel! Wenige Minuten der Übung genügen für beide Operationen. Dann kann man fortfahren: Der Vater hat einen Brief geschrieben. Hole mir eine Briefmarke, sagt er. I, bringe gleich 3, damit man ein paar im Hause hat. Was kosten die? Rechne! $3 \cdot 10 = 30$ ₰, 5 solche Briefmarken? Macht selber Briefmarkenaufgaben! Kind: Es gibt auch welche zu 5 ₰ und zu 3 ₰. Lehrer: Stimmt, aber heute braucht der Vater nur rote. Hole für 60 ₰! Für 40 ₰! Rechne vor! Du kannst sagen: 10 steckt in 40 4 mal[1]). Wiederhole! Zeige dabei auf deinen Hunderterzettel! Hole nun für 30 ₰, für 80 ₰! Rechne vor! Macht selber solche Aufgaben! So wird das Einmaleins der Zehn gewonnen, oder vielmehr: nach all unseren Vorübungen ist es schon da. Und wenn doch einmal ein Kind stutzen würde oder sonst die geringste Unsicherheit verriete, dürfte es, müßte es sein Hunderterbild hernehmen und zählend nachprüfen, auch die Zehner zählend. Es dürfte auch Zehnpfenniger zählen und was der passenden Anschauungsübungen mehr sind. Aber auswendig zu lernen in dem Sinne, daß die Worte, der Wortklang eine Stütze für das Gedächtnis wäre, das hat es nicht nötig, das soll hier nicht sein[2]). —

Heute sollt ihr Postkarten holen, 10 Stück. Kinder: Die kosten 50 ₰. 2, 4, 6, 9 Stück! Ach, ich habe ganz vergessen, daß ihr den Hunderterzettel dazu nehmen sollt[3]). Also zeigt die erste 5, die zweite, die dritte 5 usw.! Zeigt, wieviel 4 Postkarten kosten, 8 Postkarten! Rechnet das mit „mal"! $8 \cdot 5 = 40$ ₰. Gebt euch selber solche Aufgaben! Rechnet vor! Zeigt dazu!

Hole für 30 ₰ Postkarten! Für 25 ₰! Macht jetzt solche Aufgaben! Rechnet vor! Zeigt dazu! Jetzt beide Aufgaben durcheinander: Wieviel kosten . . . und: Wieviel bekommt man . . .!

Weitere Übungen folgen mit Bleistiften, Federhaltern, Radiergummis, Apfelsinen, Zitronen usw., die alle 5 ₰ kosten[4]). Die Kinder stellen die Aufgaben selbst, man muß sie daran gewöhnen. Auch an die beiden Hauptfragen. In dieser Weise werden sich die Übungen oft abspielen können. Bei schwächeren Kindern oder Klassen, die mit aufgenommenen Abstraktionen gearbeitet haben, wird man noch anschaulicher verfahren müssen, z. B.: Hunderterzettel! Heute denken wir uns wieder Pfennige auf unserem Zettel,

[1]) Das ist eine kindliche mathematische Form: später kann sie abgelöst werden von der anderen „ist enthalten in" . . .

[2]) Auf Ausnahmen werden wir bei passender Gelegenheit hinweisen.

[3]) Das hat man natürlich nicht „vergessen", sondern man versucht von Zeit zu Zeit, ob die Kinder vorstellend rechnen. Vergl. die Stufen der Zahlauffassung: an Dingen, an Symbolen, zeigend, vorstellend usw. S. 157.

[4]) Das richtet sich nach den örtlichen und zeitlichen Verhältnissen, die für die Wahl des Sachgebiets durchaus maßgebend sind.

lauter Pfennige. Die erste Apfelsine kostet 5 ₰. Zeigt die 5 ₰! Deckt sie zu[1]! Die zweite Apfelsine kostet auch 5 ₰. Zeigt diese 5 ₰! Deckt sie auch zu! Erzählt von beiden! Rechne! Rechne mit „mal". 2 · 5 ₰ sind 10 ₰ usw.

Weiter ist folgendes Hilfsmittel zu empfehlen. Damit die einzelnen Fünfer auf dem Hunderterzettel noch besser in die Augen fallen, haben wir die zueinander gehörigen Ringel „zusammenbinden" lassen mit dicken Tintenstrichen in folgender Weise:

Es ist auch vorgekommen, daß ein Kind die Fünfer so zusammenhängte:

Das schadete nichts. Sollten wir darauf dringen, daß **nur das alte** Zahlbild der Fünf im Bewußtsein bliebe? Das hieße doch, das Wachsen der Kräfte unterbinden.

Vielfach ist es erwünscht, daß die einzelnen Fünfen sich noch deutlicher voneinander abheben. Dies läßt sich leicht dadurch erreichen, daß wir die zweite Fünf jedes Zehners mit Tinte oder mit einem dunklen Farbstift[2] ausmalen. Beide Mittel zusammen: Bindestriche und farbige Unterscheidung, ergeben dann etwa folgendes Bild auf dem Hunderterzettel:

Man wird auch Kinder und Klassen haben, denen das alles leicht vorkommt. Die kann man gewähren lassen, wenn sie sich gegenseitig Aufgaben stellen wie 12 · 5, 17 · 5 usw. Wir haben gefunden, daß es auch die Schwächeren anregt, und daß das ununterbrochene Abzählen der gewünschten Einheiten und der Vergleich der Gesamtsumme mit dem Systembild der Zehner und Hunderter zu recht erfreulichen Ergebnissen führt.

Das Fünfereinmaleins ist natürlich auch in besonderen Übungen mit dem Zehnereinmaleins zu **vergleichen**. 3 rote Briefmarken

[1] Mit dem durchscheinenden Deckblatte, von dem oben (S. 213) die Rede war.

[2] Die gebräuchlichen Buntstifte malen zu hell und zu schwach für den vorliegenden Zweck. Der Blaustift, auch der Rotstift, wie er auf dem Schreibtische gebraucht wird, hat eine wesentlich bessere Wirkung.

kosten soviel wie 6 grüne; $3 \cdot 10 = 30$, $6 \cdot 5$ auch. 4 rote soviel wie 8 grüne; $4 \cdot 10 = 40$, $8 \cdot 5$ auch. Nach einiger Übung — nicht etwa im ersten Augenblick — entdecken die Kinder: „Das ist aber fein, jedesmal doppelt soviel!" Und der Lehrer: „Seht einmal zu, ob ihr herauskriegt, warum das so ist!" So sehen einfachste mathematische Probleme aus. Das kann nun wieder geübt werden mit einfachen Postkarten und Antwortkarten, mit großen und kleinen Apfelsinen, mit billigen und teuren Bleistiften usf. Ebenso tritt überall die Umkehrung hinzu: Wieviel große Apfelsinen bekommst du? Wieviel kleine? Rechne vor! 10 steckt in 30 3 mal, aber 5 steckt in 30 6 mal.

In ähnlich grundlegender Weise wie die Zehner- und Fünferreihe wird nun die Zweierreihe behandelt. Ein neuer Hunderterzettel wird folgendermaßen zugerichtet:

Auch hier werden die beiden Einer mit Tintenstrichen von den Kindern zur 2 verbunden und außerdem die Zweien abwechselnd farbig ausgemalt. Wem es besser gefällt, der kann auch, statt jede erste 2 weiß zu lassen, sie mit einer andern Farbe versehen. Auch das ganze Hundert statt der ersten 2 oder 4 Zehner in dieser Weise zu zerlegen und auszustatten, soll den Kindern unbenommen sein. Es wird nicht verlangt, es wird aber erst recht nicht verboten, es wird erlaubt denen, die den Nachweis führen, daß sie die erste oder daß sie auch die zweite Zweierreihe beherrschen. Man wird staunen, wie bald 7jährige Kinder heraus haben, daß z. B. $36 \cdot 2$ 72 ergibt. Sie lesen es ab, aber das schadet nicht, es nützt vielmehr; sie sollen es noch gar nicht auswendig wissen, sie sollen vielmehr mit der 36 und der 72 eine Raumvorstellung verbinden. Zeit genug werden ihnen auch die Beziehungen dieser beiden Zahlen bekannt und geläufig werden. Und warum soll man auf die Lust und den Wetteifer verzichten, der entsteht, wenn einige weitergehen „dürfen"! So wird das Einmaleins der 2 gelernt weit über die 20 hinaus, aber ohne jedes „Memorieren", ohne jedes „Einprägen", ohne jenes gewaltsame Befestigen, das auf der Klang- und Sprechbewegungsvorstellung allein bauen zu können vermeint. Es prägt sich vielmehr in immer wiederholter Anschauung von selbst ein. Selbstverständlich wird alles konkretisiert. 2 ₰ kostet also 1 Bogen Papier, 1 dickes Löschblatt, 1 Milchschiefer, 1 altbackenes Brötchen, 1 Linienblatt, 1 großer Briefumschlag, 1 Schokoladenringel für den Christbaum usw.

Für die Zweierreihe wie für alle übrigen gilt immer wieder dies beides: 1. Ein Kind, das nicht rasch das Ergebnis hat, darf nicht nur, sondern es muß — aber ja nicht etwa als Strafe! — den Zettel fragen und genau nachsehen. Das Arbeiten ohne Zettel wird nur solchen gestattet, die ihre Sicherheit nachgewiesen haben. 2. Gelegentlich sind immer wieder Nachprüfungen einzustreuen, die durch Abzählen erfolgen.

An die Zweierreihe schließen wir die Viererreihe an. Wenn man den Hunderterzettel mit den Zweiern benutzen will, so werden auch noch zwei benachbarte Zweien mit Strichen verbunden, so daß folgendes Bild entsteht:

Will man lieber einen neuen Zettel nehmen, so empfiehlt es sich, ihn gleich für die Vierer- und Achterreihe einzurichten, etwa so, daß man die Vieren so verbinden läßt:

Die nach rechts oder die nach links offenen Vieren können dann auch noch farbig ausgestattet werden. Wenn man die Vieren beispielsweise weiß und gelb oder weiß und hellgrün nimmt und gegeneinander öffnet, so kann man sie nicht nur zu Achten schließen, sondern jeder zweiten Acht dunklere Töne geben lassen, etwa blau und schwarz. Die Achterreihe würde dann folgendes Bild bekommen:

Die ausgestreckten Bindestriche zeigen an, daß noch ein Stück an der betreffenden Acht fehlt[1]).

Hier wie überall auf diesem Gebiet werden die Übungen um die beiden Fragen gruppiert: Wieviel werden kosten ...? und: Wieviel bekommt man für ...? Hier wie überall werden konkrete Sachverhältnisse unter den Zahlsymbolen gedacht: für 4 ₰ bekommt man 1 Apfelsine, 1 Bündel Radieschen, 1 Federhalter, 1 Pfefferkuchen, 1 Amerikaner ... 8 ₰ kostet ebenfalls 1 Apfelsine, 1 Bückling, 1 Flasche Bier, 1 Notizbuch, 1 Pfefferkuchen usw.

Glaubt man, mit der Übung der Achterreihe so weit fertig zu sein, daß man weitergehen kann, dann empfiehlt es sich zunächst, wiederholt die Vierer- und Achterreihe, die Zweier- und Viererreihe, endlich die Zweier-, Vierer- und Achterreihe miteinander in Beziehung zu setzen: $5 \cdot 8 = 40$, $10 \cdot 4$ auch, $20 \cdot 2$ auch; $3 \cdot 8 = 24$, $6 \cdot 4$ auch, $12 \cdot 2$ auch ... Für 32 ₰ bekommt man 4 große Apfelsinen zu 8 ₰, oder 8 kleine zu 4 ₰ — „oder 16 halbe", fügte ein Kind scherzhaft hinzu[2]).

Ein weiterer Hunderterzettel dient der Dreier- und Sechserreihe, von denen wie bisher jede erst eine Zeitlang für sich allein geübt wird, dann mit der andern in Beziehung tritt. Verbindung und farbige Gliederung läßt folgendes Bild der Dreierreihe entstehen:

[1]) Nachdem wir die Achterreihe in dieser Weise behandelt hatten, machten die Kinder völlig selbständig die Bemerkungen: „Die erste, dritte und fünfte 20 wird von der 8 nicht voll gemacht, jede streckt die Hände aus und braucht noch eine 4." „Die zweite und vierte 20 paßt gerade zur 8, die sind zufrieden, sie brauchen nichts mehr." Die sechste 8 würde es auch so machen, bei 120 paßt es, das ist $15 \cdot 8$." Endlich: „Die ungeraden Zehner passen niemals zur 8, auf der ganzen Mittellinie von oben bis unten strecken sie die Hände aus." Kinder, die solche Beziehungen selbst sahen, dürften auf dem rechten Wege zu mathematischem Verständnis sein.

[2]) „Ja, wenn ..!" entgegnete ich, und andere Kinder beeilten sich, das fortzusetzen: „wenn der Grünwarenhändler halbe verkaufte." Und andere meinten: „Aber richtig wäre es da," und ich stimmte gern zu. Ich hoffte beiden damit gedient zu haben: der Erziehung zum Wirklichkeitssinn und der Erziehung zu mathematischem Verständnis, das sich gern auch einmal über die Wirklichkeit hinwegsetzt.

Die Verbindung zur Sechserreihe kann ähnlich der Achterreihe gestaltet werden,

so daß die Beziehung zur Dreierreihe lebhaft heraustritt. Sie kann aber auch diese Gestalt annehmen, die leichter zu überblicken ist:

Endlich wird sich noch je ein Zettel nötig machen für die Siebener- und Neunerreihe. Jene gestaltet sich so:

Die Neunerreihe aber nimmt mit Vorteil zwei Formen an[1]):

Beide Formen fordern geradezu zum Aufsuchen von Beziehungen heraus, und die Kinder waren — nachdem sie auszählend die Zettel fertig gestellt hatten — freudig überrascht über den „feinen Zettel". Sie überboten sich ordentlich darin, Beziehungen zu finden; z. B. bei jener ersten Form: „Die weißen links nehmen ungerade ab: 9, 7, 5, 3, 1." Warum wohl? „Die weißen rechts nehmen gerade zu: 2, 4, 6, 8." Warum? „In der Mitte ist es umgekehrt." Wer kann herausfinden, warum das so sein muß? . . . Oder bei der zweiten Form: „Hier sieht man, wie eigentlich an jeder 10 bloß eins fehlt." „Da kann man denken, 4 · 9 wäre beinahe 40, bloß die 4 schwarzen weg, 36." Mancher Leser wird uns verstehen, wenn wir angesichts solcher Erfahrungen sagen, wir strebten nach mathematischer Bildung.

Wenn die einzelnen Reihen so in bedächtigem Fortschritt bewältigt sind, ist es nötig, auch solche Reihen im Wechsel zu üben, die weniger Berührungspunkte miteinander haben; z. B.: Heute rechnen wir mit Zitronen, erst mit kleinen zu 4 ₰ das Stück, nun mit größeren zu 7 ₰ . . . Zeigt, wo die großen und kleinen zusammenpassen! . . . Heute rechnen wir mit grünen und braunen Briefmarken usw.

Weiter kann sich die Rechenfertigkeit der Kinder auch anderen Dingen zuwenden, die sich zur Multiplikation eignen. Man wolle

[1]) Um mit Zetteln zu sparen, gaben wir jedem Kinde einen zur Neunerreihe, gestatteten aber nur verschiedene Ausführung zweier nebeneinander sitzender Kinder; eins von beiden durfte die erste, das andere die zweite Form herstellen. Während des Rechnens wurde je nachdem der eine oder andere oder beide benutzt. Durch gegenseitiges Aushelfen der Nachbarn läßt sich auch sonst mit Zetteln sparen, falls man dazu genötigt ist. Ein Kind bearbeitet z. B. den mit Dreien und Sechsen, sein Nachbar den mit Vieren und Achten. Freilich ist es ein Notbehelf, aber jeder Notbehelf ist besser als nichts.

sich aber hüten vor Aufgaben wie: 1 Kegelschub hat 9 Kegel, 8 Kegelschübe wieviel? Diese Aufgabe dürfte höchstens im Erzgebirge am Platze sein, wo die fertiggestellten Kegel zu neun in Schachteln verpackt werden müssen. Die meisten der übrigen deutschen Kinder werden wohl nie Veranlassung haben, sich 8 Kegelschübe vorzustellen oder nach der dabei in Betracht kommenden Kegelzahl zu fragen. Ebenso zwecklos ist es, die Beine von 7 Fliegen zu berechnen. Wer sich 7 Fliegen vorstellt, kann nur mit größter Anstrengung an die 42 Beine denken. Und gar in der Anzahl der Beine (was soll mit diesen Beinen geschehen?) ein mathematisches Problem zu sehen, wie es deutlich doch in jeder Preisaufgabe zu erkennen ist, das ist unmöglich. Kein Mensch fragt im Leben darnach, wieviel Beine 4 Spinnen hätten. Man ist völlig zufrieden, wenn man weiß, daß jede 8 hat. Ebenso ist es mit den 7 „Blättchen" des Roßkastanienblattes, mit den 5 Strahlen eines Sternes und ähnlichen gesuchten Aufgaben. Sie bieten vermeintlich einen anschaulichen Hintergrund oder eine „Anwendung", sie sind aber keines von beiden, sondern weil sie des Problemgehalts entbehren — mathematische Spiegelfechterei.

Völlig verkehrt sind auch Aufgaben wie die: Ein Brötchen kostet 3 ₰. Wieviel Brötchen kannst du dir für 9, 15, 27, 12, 18, 30 ₰ kaufen [1]). Denn jedes der in Betracht kommenden Kinder hat schon für 5 ₰ 2 Brötchen holen müssen, kann also unschwer ausrechnen, daß man für 15 ₰ 6 Brötchen bekommt.

Brauchbar dagegen sind solche wie: „Wieviel Tage sind 4 Wochen? Dies „rechnet" auch zuweilen noch der Erwachsene aus, zumal, wenn er 4 Wochen mit dem laufenden Monate zu vergleichen beabsichtigt. Ebenso die Umkehrung: Noch 40 Tage; wieviel Wochen müssen wir da warten? u. v. a.

Mit diesen wenigen Beispielen — es genügen tatsächlich an dieser Stelle diese Andeutungen — wollen wir nur sagen, daß die anschauliche Grundlage der Einmaleinsgewinnung nicht Phantasieexempel sein sollen, sondern solche Aufgaben, die den Zusammenhang mit dem wirklichen Leben erkennen lassen. Diese sind gefühlsbetont, jene mathematische Hupferei jedoch nicht. Darum konnten wir auch als Hauptfragen — nicht als einzige — jene beiden hinstellen: Wieviel kosten . . .? und: Wieviel Stück bekommt man für . . .?

Und der Rückblick auf das Verfahren selbst zeigt anschauliche überblickende Gewinnung der Einmaleinssätze, abzählendes Nach-

[1]) Die Aufgabe ist wörtlich einem viel gebrauchten Rechenbuche entnommen. Es scheint fast, als dürfe die Schule um der Ordnung und um des Systems willen vom Leben keine Kenntnis nehmen.

prüfen, Geläufigwerden durch wiederholten Umgang und Vergleich, Aufgabenbilden seitens der Kinder.

b) Das kleine Einmaleins als Verteilen.

Drei Aufgaben bringt uns eigentlich dieser Abschnitt: die Operation des Verteilens, angewendet auf Zahlen, ein nochmaliges Durchlaufen der gewonnenen Einmaleinsreihen, und endlich ein Weiterführen der Schlußrechnung. Hier lassen sich nicht ein paar Hauptfragen von der überragenden Bedeutung der beiden vorigen formulieren. Denn das Verteilen von Nüssen und anderen Kinderdingen ist bald erledigt, und das Verteilen von Dividenden geht die Kinder noch nichts an. Jedes andere bloße Verteilen ist aber entweder selten oder nicht lebenswahr. Dagegen kommt das Verteilen in Verbindung mit dem Malnehmen oder in Verbindung mit dem Enthaltensein wiederum durchaus lebenswahr vor. Aus diesen beiden Verbindungen besteht nämlich die gesamte Schlußrechnung:

Für 3 Apfelsinen hat mein Bruder 18 ₰ gezahlt, ich möchte meiner Mutter 5 solche zum Geburtstag schenken — das ist das Elementarbeispiel sowohl für die Schlußrechnung als auch für das Verteilen in Verbindung mit dem Malnehmen. Oder: 18 ₰ hat mein Bruder für 3 solche Apfelsinen gezahlt; wieviel könnte ich mir kaufen für meine 40 ₰? Dies Beispiel kennzeichnet die Verbindung des Verteilens mit dem Enthaltensein. Demnach können die in Betracht kommenden wichtigeren Fragen so ausgedrückt werden: Wieviel kosten die Stücke, die ich wünsche? und: Wieviel Stück kann ich für mein Geld haben?

10 Stück Kohlrabi hat die Mutter mitgebracht für 30 ₰. Da kommt die Großmutter zu Besuch. Schnell, hole noch 4 Stück! Rechnet! Kinder: Wenn die 10 Stück 30 ₰ gekostet haben, so kostet 1 Stück 3 ₰[1]), 4 Stück kosten dann 12 ₰. Ein anderes Kind: „Ja, wenn man aber bloß 4 Stück holt, wird der Grünwarenhändler wohl mehr verlangen.“ Lehrer: „Du hast recht; darum fügte die Mutter hinzu: Sage, ich hätte soeben von ihm schon 10 Stück mitgebracht.“ Kind: „Dann hat sie eigentlich 14 gekauft.“

10 Apfelsinen kosten 50 ₰, wieviel 6? Rechnet vor! 10 Notizbücher kosten 90 ₰, ich brauche aber nur 2; rechnet! Die werden sicher 20 ₰ kosten. Aber wenn sich einige Kinder zusammentun und einer holt für sie gleich 10 Stück, dann kostet jedes nur 9 ₰, und 2 Stück kosten dann 18 ₰; dann hat jedes Kind 2 ₰ gespart. — Macht selbst solche Aufgaben, die mit 10 anfangen!

[1]) Die mathematische Form: ich muß „die 30 durch 10 teilen“ empfehlen wir etwas zurückzustellen, etwa bis zur Zweierteilung, weil daß Teilen in wenige Teile die Kinder zu größerer Gegenständlichkeit des Vorstellens nötigt.

Nun eine andere Art: 10 Zitronen kosten 70 ₰, hole für 30 ₰! Rechne vor! Wenn 10 Zitronen 70 ₰ kosten, dann kostet eine 7 ₰; für 30 ₰ müßte ich dann 4 Stück bekommen und 2 ₰ zurück. Es kann aber sein, daß der Kaufmann sagt: Wenn du bloß 4 holst, kosten sie 30 ₰[1]). Macht selbst solche Aufgaben! Eine Zeitlang wollen wir fragen: Wieviel kosten die, die ich haben will? Dann eine Zeitlang: Wieviel bekomme ich für mein Geld?

In solcher Weise werden die Einmaleinsreihen durchgenommen. Dies kann im ganzen in derselben Weise geschehen, wie es der vorige Abschnitt gezeigt hat. Auch hier kann die Reihenfolge eingehalten werden: 10, 5, 2, 4, 8, 3, 6, 9, 7. Der nahe liegenden Versuchung, über die einzelnen Übungsreihen rasch hinwegzugehen, wolle man widerstehen. Auch dieses Teilen bedarf des oft wiederholten Verkehrs, ehe der Zustand inniger Bekanntschaft eintritt. Glaubt man, eine Reihe werde vollkommen beherrscht, so möge man lieber die Sachgebiete wechseln. Man kann hierzu die *gesamte Schlußrechnung* heranziehen, soweit sie sich im Gebiete des kleinen Einmaleins bewegt und direkte Verhältnisse zeigt.

Besondere Betonung wird aber hier die Herausarbeitung der *inneren Beziehungen* zwischen den einzelnen Aufgaben und Aufgabengruppen erfahren. Diejenigen Zusammenstellungen, wo man von der Angabe 10 n auf das Ziel 5 n gelangt, werden den Kindern rasch einleuchten, z. B. 10 Eier kosten 80 ₰, wieviel 5? Die Hälfte. Denselben Wert aber haben Verbindungen wie 10 n und 9 n, 5 n und 4 n, 5 n und 6 n, 10 n und 11 n, 4 n und 3 n, 7 n und 6 n, 7 n und 8 n usw., d. h. alle die nebeneinander liegenden Produkte, von denen sich immer das gesuchte an das gegebene anlehnt; also 7 Bleistifte kosten 35 ₰; 6 wieviel? einen Fünfer weniger. 9 solche Stifte? einen Fünfer weniger als 10, nämlich 45 ₰. Außerdem sind diese Übungen dahin zu erweitern und zu vertiefen, daß auch bei gegebener Einheit so verfahren werden kann. Die kennzeichnenden Beispiele hierfür finden sich im Gebiete des großen Einmaleins. Aber nichts hindert uns doch, dahin Ausflüge zu unternehmen, im Gegenteil, das Kraftbewußtsein und das Vorwärtsstreben wird mächtig angeregt; z. B. nachdem die vorigen Übungen vorausgegangen sind: $6 \cdot 12$! Kind: $10 \cdot 12 = 120$, die Hälfte ist 60, 12 mehr ist 72. Natürlich geht das nach einiger Übung bald viel schneller, als man es hier lesen kann. Wir gingen in dieser Richtung noch weiter und ließen zusammenstellen 10 n und 8 n, 10 n und 12 n, 5 n und 7 n, 5 n und 3 n; z. B. denkt auch, ihr hättet $8 \cdot 8$ vergessen und solltet es ausrechnen! $10 \cdot 8 = 80, - 16 = 64$. Macht

[1]) So läßt sich dem System wie dem Leben gerecht werden in der mathematischen Erfassung der Wirklichkeit.

selbst solche Aufgaben! $7 \cdot 14$! $5 \cdot 14 =$ die Hälfte von $140 = 70$, und 28 ist 98. Ja, die Kinder verfolgen auch sonst diese Richtung selbständig weiter und rechnen $27 \cdot 3$ so: $30 \cdot 3 = 90$, 3 Dreien davon weg sind 81. Das bedeutet eine Wiederholung des Einmaleins, aber auch schon eine Erweiterung und Vertiefung der Schlußrechnung in dem Sinne, daß von der Mehrheit wohl auf die Einheit zurückgegangen wird, daß aber dann nicht immer mit der neuen Mehrheit malgenommen werden müßte, sondern je nach Lage des Falles das Multiplizieren durch Addieren oder Subtrahieren ersetzt werden kann, wenn dies die Schnelligkeit und Sicherheit der Rechnung erhöht.

In dieser Richtung kommt noch eine andere Gruppe von Zusammenstellungen in Betracht: $9 \cdot 4$ und $3 \cdot 4$, $4 \cdot 7$ und $8 \cdot 7$, $8 \cdot 6$ und $4 \cdot 6$ nebeneinander gestellt in derselben Aufgabe, so ähnlich wie bei dem obigen Beispiel 10 n und 5 n (das aber wegen seiner größeren Bedeutung vorausgenommen werden muß). Hier handelt es sich darum, daß die Kinder nicht über die wirkliche Einheit schließen lernen, sondern eine höhere Einheit suchen. Gelegentliches Vormachen genügt dabei; entwickeln aber wäre schädlich. Nach den angegebenen Vorübungen muß die Anregung genügen: Wer kann es anders? noch anders? oder: Wer kann es kürzer? Eigene Entdeckungen der Kinder müssen diese Zusammenstellungen werden, wenn sie die erwünschte Wirkung haben sollen. Weitere Übungen in dieser Richtung bieten die Zusammenstellungen 9 n und 6 n, 12 n und 9 n, 10 n und 6 n usw.

Die Benutzung des Hunderterzettels tritt schon merklich zurück. Wo man freilich Unsicherheit oder Wortvorstellen bemerkt, da ist er am Platze. Seine Verwendung gestaltet sich dann etwa so: 24 geteilt durch 3! Das Kind **sieht**, daß es 30 leicht durch 3 teilen, d. h. in 3 Teile zerlegen könnte, und schließt aus den bisherigen Erfahrungen mit dem Hunderterzettel, daß bei der Verteilung von 24 auf jeden solchen Teil etwas weniger als 10 kommen müsse. Ein Probieren mit 9 und 8 ergibt 8[1]). $7 \cdot 8$ kann dann auf dem Hunderterzettel ausgesucht werden, der die Achterreihe enthält. So umständlich nun jenes Teilen und dieses Aufsuchen ist, so notwendig ist es doch für diejenigen Kinder, die die betreffenden Assoziationen noch nicht in Raumvorstellungen gebildet haben[2]). Gerade die Umständlichkeit des Verfahrens ist uns eine wirksame

[1]) Dieser Vorgang spielt sich nun in den meisten Fällen nur halbbewußt ab und wird nach und nach und zuletzt so vollständig eliminiert, daß der Erwachsene, der das bei einem Kinde bemerkt, geneigt ist, dies Kind für beschränkt zu halten. Das öftere Aufsuchen der 24 im Malrechnen beschleunigt diesen Ausscheidungsvorgang.

[2]) Wir wollen gern hinzufügen, daß dies Verfahren nur in Ausnahmefällen nötig war.

Gehilfin bei dieser Arbeit. Auch das schwache Kind strebt danach, diese Umständlichkeit zu umgehen und macht die in Betracht kommende Assoziation oft rascher sich zu eigen, als man erwartet[1]).

Eine besondere Verwendung findet der Hunderterzettel in diesem Abschnitt nicht nur bei den Schwächeren, sondern gerade auch bei den Begabteren. Sie rechnen die Zweierreihe ja nicht nur bis zur 20 oder 40; sie führen vielmehr sämtliche Reihen selbständig bis zur 100 fort und sehr oft und mit großer Freude noch darüber hinaus. Man läßt sie gewähren, prüft gelegentlich, ob der „Befähigungsnachweis" erbracht werden kann, und hält zurück, wo die Wünsche des Kindes sein Können übersteigen. Immer gilt: Wer seine Sache gut macht, darf vorwärts gehen. Gern wird man solchen Kindern auch eine gelegentliche Anregung zukommen lassen: 2 Stück amerikanische Äpfel kosten 36 ₰; wieviel würden 5 kosten? Oder die entgegengesetzte Art: 8 Stück Mandarinen sollen 32 ₰ gekostet haben; wieviel bei diesem Preise 23 Stück? Oder beide Aufgabenarten im Sinne unserer zweiten Frage: 2 solche kleinere amerikanische Äpfel kosten 28 ₰; wieviel bekäme ich für 1 ℳ? Wieviel von jenen Mandarinen bekäme ich für 70 ₰? Solche Aufgaben sind mit dem Hunderterzettel nicht nur zu lösen, sondern auch öfters nachzuprüfen.

c) Das kleine Einmaleins als Zerlegen in Faktoren.

Das ist eine zwar nicht unbedingt notwendige aber doch recht wirkungsvolle Ergänzung der bis dahin ausgeführten Übungen. Ebenso wie wir bei den anderen Operationen die Kinder auf die Hauptfragen einübten (Wieviel kosten ... Stück? Wieviel bekommt man für ... ₰? Wieviel kostet die von mir gewünschte Stückzahl? Wieviel bekomme ich für mein Geld?), so läßt sich auch hier in Beziehung auf das Hauptgebiet des Rechnens, das der häuslichen Wirtschaftsführung, eine Hauptfrage formulieren: Wie kann ich verschieden einkaufen? Z. B. wie kann ich Apfelsinen einkaufen bei 48 ₰? 6 Stück zu 8 oder 8 Stück zu 6 oder 12 Stück zu 4 oder 4 ganz große zu 12 ₰. Ähnliche Aufgaben bilden die Kinder bald selbst.

Ein wesentlicher Fortschritt besteht nun darin, daß man Produkte und Summen gestattet: Für 30 ₰ bekomme ich 10 Stück zu 3, 7 Stück zu 4 und 2 ₰ zurück, 6 Stück zu 5, 5 Stück zu 6, 4 Stück zu 7 und 2 ₰ zurück, 3 Stück zu 8 und 6 ₰ wieder usw. Ein weiterer Fortschritt läßt auch Differenzen zu: Für 73 ₰

[1]) Vielleicht ist der Vorgang besser so auszudrücken: Die Umständlichkeit — die Nebenvorstellungen — ließen die Assoziationsfeststellung erst ein Erlebnis werden, während die bloße wörtliche Einprägung nur unzureichende Spuren zurückließ.

bekomme ich 12 Stück zu 6 und 1 ₰ bleibt, 10 Stück zu 7 und 3 ₰ bleiben zurück, 9 Stück zu 8 oder 8 Stück zu 9 und jedesmal 1 ₰ zurück, 7 Stück zu 10 und 3 ₰ bleiben Rest, 6 Stück zu 11 und 7 ₰ bleiben Rest oder 7 Stück zu 11, wenn ich noch 4 ₰ drauflege, 6 Stück zu 12 und 1 ₰ Rest; will ich 6 Stück zu 13 haben, so muß ich noch 5 ₰ drauflegen, bei 5 Stück zu 15 noch 2 ₰, bei 3 Stück zu 25 ebenfalls.

Auf eine besondere Übung in dieser Gruppe sei noch hingewiesen. Man wird hier auch das Problem behandeln, w a r u m 4 · 9 36 sei und 9 · 4 auch. Für diesen Zweck empfiehlt es sich, daß man als Anschauungsmittel[1] einige Tafeln herstellt, welche ein paar Beispiele in nicht-rhythmischer Darstellung enthalten, wie etwa das folgende, das der 4 · 9 und 9 · 4 entspricht.

Selbstverständlich läßt sich die Sache auch so gestalten, daß man in jeder Stunde ein anderes passendes Beispiel rasch an die Wandtafel malt. Das hat noch den Vorteil, daß die Kinder die Entstehung sehen, und wenn man ihre Aufmerksamkeit beispielsweise den wagerechten Reihen zulenkt, sagen können: einmal 9, noch noch einmal 9 usw. Diese Wirkung kann durch eingeschaltete Pausen noch erhöht werden. Wenn man aus den 4 Neunen nun 9 Vieren machen will, muß man die Tafel vor den Augen der Kinder um 90° drehen, so daß die wagerechten Reihen nun die Vieren enthalten.

Ohne diese Drehung g l a u b e n es die Kinder dem Lehrer ja auch; es ist aber interessant, die Freude zu bemerken, wenn das Kind infolge des Drehens zu der Ü b e r z e u g u n g kommt, daß 4 · 9 wirklich 9 · 4 sein müsse.

Auch mit wirklichem Gelde — 2 Rollen mit Einpfennigstücken

[1]) Nicht als Arbeitsgerät für die Hand der Kinder! Es kommt hier nur eine einmal zu gewinnende Einsicht, nicht eine in eigentätiger Übung zu erwerbende Assoziation in Betracht.

reichen weit — haben die Kinder selbst gruppenweise solche Übungen vorgenommen. Umstellungen, wie sie in den ersten Beispielreihen dieses Abschnittes gezeigt wurden, ergeben sich ganz von selbst. An der dargestellten 36 läßt sich die unterste 9 in 3 Dreien zerlegen, die man dann als Dreierreihen an der einen Schmalseite angliedern kann. Da zeigt sich, daß 36 auch aus 12 · 3 besteht, und, wenn man an die andere Seite des Tisches tritt — das Kind legt eine Zeilung Wert auf diese Voraussetzung — auch aus 3 · 12 usf.

Der Hunderterzettel, an dem auch die eingangs dargestellten Zerlegungsübungen vorgenommen werden können, besonders im Sinne einer Nachprüfung, ermöglicht noch eine andere Übung, nämlich die Umwandlung der Produkte von der zuletzt dargestellten Form der rhythmisierten Reihen in Systemzahlen. An zwei Beispielen soll das kurz gezeigt werden. Wir decken z. B. 4 · 8 ab in dieser Form:

Dazu benutzen wir soweit als möglich unsere Deckpappe; nur für das Abdecken der rechts oben befindlichen 4 Ringel brauchen wir unser durchscheinendes Abdeckblatt oder in Ermanglung dessen ein Stück dünnen Papiers, durch das sie hindurchscheinen, oder eine Zelluloidplatte oder eine Glasscheibe[1]). Diese Art der Darstellung ist recht wirkungsvoll. Die Kinder erkennen sofort, daß die letzte untere verbundene ●● nach rechts hinauf unter das dünne Papier rücken könnte, daß dann der 2. Zehner voll wäre, und daß dann das bekannte Zahlbild der 32 zu sehen sein müßte. Genau so kann das Abdecken bei 6 · 7 vor sich gehen.

Wenn man sich die beiden verbundenen Sechsen hinaufgerückt denkt, erscheint das bekannte Zahlbild der 42. 9 · 4, 8 · 3 usw. be-

[1]) Alte photographische Platten eignen sich ganz gut dazu. Befürchtungen wegen schwerer Verletzungen braucht man nicht zu hegen.

handelt man in der Umkehrung, indem man die Vieren, Dreien usw. als senkrechte Reihen erscheinen läßt.

Das gesamte Einmaleins läßt sich auf diese Weise darstellen. Das geschieht mit immer tieferem Einblick in die Zahlen, mit immer größerem mathematischen Gewinne.

Einige allgemeine Bemerkungen mögen diesen Teil über die Gewinnung der Operationen schließen.

1. Grundsätzlich gilt, daß jedes Rechenergebnis im Überblick gewonnen, aber zählend nachgeprüft wird. Jenes Überblicken soll die durch Raumgrößen angedeuteten Zahlgrößen immer sicherer und schneller zu erfassen suchen; dies Abzählen, das nach und nach in Zehner-, ja in Zwanziger- und Hunderterrhythmen erfolgt, übernimmt die Kontrolle und die Gewähr für die Richtigkeit jenes Überblickens.

2. Der innere Werdegang jeder Übung gestaltet sich in 4 Stufen so, daß sie zuerst an wirklichen Dingen, dann an dinglichen Symbolen, dann an Zahlsymbolen (Zahlbildern usw.) ausgeführt wird, und daß endlich der Vorgang an den Zahlsymbolen nur vorgestellt wird. Es braucht dabei kaum betont zu werden, daß anfangs die erste dieser 4 Stufen stark hervortritt, während etwas später die zweite das Hauptgewicht hat. Die darauf folgende Zeit, in der die dritte Stufe die herrschende Stellung einnimmt, ist beinahe typisch für diese Übungen insofern, als alle Rechenvorgänge ausgeführt werden an den Zahlsymbolen. Falls die geringste Unsicherheit sich zeigt, wird sofort zur Ausführung mit wirklichen Dingen oder dinglichen Symbolen zurückgekehrt. Andrerseits wird nun immer öfter der Versuch gemacht, eine Anzahl Übungsaufgaben nur vorstellend lösen zu lassen. Es bedarf wohl kaum eines Hinweises, daß hierbei nicht die Wortvorstellung, auch nicht die Ziffervorstellung gemeint ist, sondern daß der Vorgang an den vorgestellten Zahlsymbolen sich vollzieht.

3. Sämtliche Aufgaben sollen gegenständlich aufgefaßt und gedacht werden. Es wird also immer mit Pfennigen, Apfelsinen, Federn, Briefmarken usw. gerechnet, auch dann, wenn die Benennung wegbleibt. Wir lassen die Benennung sehr bald absichtlich weg, einmal zum Zwecke der Zeitersparnis, dann auch, um die Allgemeingültigkeit unserer Rechnungen im Bewußtsein der Kinder anzubahnen. Dies Anbahnen ist selbstverständlich keine vollendete Abstraktion. Wir sind uns dessen bewußt, daß zur vollendeten Abstraktion ein langer Erfahrungs- und Übungsweg führt. Darum bleibt die Sachvorstellung unsern Kindern schwach im Bewußtsein, auch dann, wenn wir die Bezeichnung weglassen.

Darum gewöhnen wir die Kinder, jederzeit in der Lage zu sein, die weggelassene Benennung hinzuzufügen. Wer das versäumt, der wird die Schuld in sich selbst suchen müssen, wenn einige seiner Kinder später beim Rechnen mit mehreren Maßeinheiten mit erschreckender Regelmäßigkeit die Sorten verwechseln. Zu diesem Zwecke ist es weiter nötig, die Kinder darin zu üben, daß sie zu irgend welcher Aufgabe, die ihnen nur in Zahlen entgegentritt, sofort eine geeignete Benennung, eine passende Sachlage sich vorstellen.

4. Von Anfang an wird darauf gehalten, daß die **Kinder selbst Aufgaben bilden**, und zwar nicht nur so, daß einige befähigte Kinder dazu gelegentlich mit herangezogen werden, sondern so, daß die ganze Klasse im gegenseitigen Stellen der Aufgaben geübt wird. Das kann paarweise geschehen oder gruppenweise, oder so, daß die Mädchen den Jungen, die eine Seite der anderen Seite Aufgaben stellt, wobei die eine lösend, die andere kontrollierend tätig ist.

4. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die Fortführung der Operationen im Bereiche der Systemzahlen.

§ 27. Die Aufgabe der Stufe.

Die Fortführung der Operationen in einem weiteren Zahlenraume und mit Betonung der verschiedenen Systemeinheiten scheint keine wesentlich neue Aufgabe zu stellen, sondern sich mit der weiteren Bearbeitung derjenigen Aufgaben zu begnügen, welche in den bisherigen Lehrabschnitten schon zur Behandlung standen. Daß eben nach und nach mit größeren Zahlen gearbeitet wird, darin glaubt man nur verhältnismäßig geringe, vor allem aber **keine neuen Schwierigkeiten** sehen zu dürfen. Denn wenn die Operationen an den Zahlgrößen des ersten Hunderters ausgeführt werden können, so macht es für ein Kind, das einen verständigen Rechenunterricht genossen hat, nichts aus, ob es 3 Einer oder 3 Zehner oder 3 Hunderter oder 3 Tausender mit 4 malzunehmen hat. Es gewinnt in jedem Falle die 12 mit der entsprechenden Bezeichnung. Die Schwierigkeiten beginnen erst, wenn **mehrere Einheiten zusammentreten**, und hier liegt tatsächlich die nicht geringe **erzieherisch-mathematische Bedeutung** des ganzen Abschnitts. Sie ist darin zu finden, daß jetzt an das Kind die

Anforderung herantritt, zugleich mit dem Aufgabebewußtsein größere Zahlen im Gedächtnis zu behalten. Die bisherigen waren zweistellig, nun kommen dreistellige in Betracht, das ist eine Steigerung der Leistungen um 50 %. Und da überhaupt bei 6 die Grenze des Aufmerksamkeitsumfanges und die Grenze des unmittelbaren Behaltens — ohne unterstützende Faktoren — liegt, so bedeutet dieser Abschnitt die Steigerung der Leistungsfähigkeit des Zahlengedächtnisses bis zur normalen Höchstleistung. Diese Leistungsfähigkeit erscheint erst dann im rechten Lichte, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß es sich ja nicht nur darum handelt, mehrere Zahlen bis zu 3 Stellen zu hören und nachzusagen, sondern auch darum, mit ihnen zu rechnen. Das erfordert aber die Bewältigung einer ganzen Reihe von Teilaufgaben, die in der Übersicht klar erfaßt werden und während der ganzen Arbeit im Blickfeld des Bewußtseins bleiben müssen, während außerdem die Ergebnisse der jeweils ausgeführten Teilaufgaben im Gedächtnis zu behalten sind. Größere Aufgaben dieser Art zu lösen, wären auch wir nicht imstande, wenn uns nicht eine ganze Reihe unterstützender Faktoren zur Verfügung stände, wie Bekanntheit der einzelnen Zahlbegriffe, Rhythmus, sachliche oder formelle Assoziationen, gegebenenfalls die Ziffern usw. Für das Kind kommt als wichtigster Hilfsfaktor in dieser Beziehung die Raumvorstellung in Betracht.

Daß auf dieser Stufe nicht die volle Leistungsfähigkeit erreicht wird, ist selbstverständlich. Sie stellt sich erst nach weiteren Jahren der Übung ein und ist stark abhängig von individuellen Verschiedenheiten, vom Unterricht und insbesondere von der besonderen Gewöhnung an einen oder mehrere dieser Hilfsfaktoren. Hier soll nur hervorgehoben werden, daß es die Sonderaufgabe dieser Stufe ist, diesem Ziele nachzustreben, also das Zahlengedächtnis zu üben, nachdem auf den vorigen Stufen die Zahlauffassung — bis zur Erfassung der verschiedenen Systemeinheiten und ihrer gegenseitigen Größenverhältnisse — und die Operationsauffassung, jede mit der ihr entsprechenden Darstellung, soweit ausgebildet worden ist. Daß die neue Aufgabe zu den alten hinzutritt, sie nicht etwa ablöst, ist wohl so einleuchtend, daß der Hinweis darauf genügt.

Mit der Klarheit über diese Aufgabe haben wir nun auch die Gesichtspunkte gewonnen, nach welchen die Auswahl, die Anordnung wie der Betrieb unserer Übungen sich werden richten können. Sie lassen sich zusammenfassen in die Worte: Steigerung der Anforderungen an das Zahlengedächtnis bei Vermeidung von Schwierigkeitshäufungen. Dazu macht sich eine Übersicht über die in Betracht kommenden Übungen nötig.

§ 28. Addition und Subtraktion.

1. Addition und Subtraktion reiner Zehner.

Im Zahlenraume bis 100 ist öfters schon mit reinen Zehnern gearbeitet worden bei Aufgaben wie 17+10, 36+20, 45—30 usw. Jetzt kommen dreistellige in Betracht, die wir aber zunächst als zweistellige behandeln wollen.

17 Zehner + 2 Zehner	67 Zehner — 4 Zehner
25 „ +14 „	48 „ —17 „
36 „ +45 „	52 „ —26 „

Jedes Beispiel kennzeichnet, wie leicht ersichtlich ist, eine ganze Aufgabengruppe. Der Fortschritt ist jedenfalls erkennbar: zunächst werden einstellige Zehner hinzugefügt und abgezogen, dann zweistellige ohne, schließlich zweistellige mit Überschreiten der nächsten Systemeinheit.

Diese Zehner werden anfangs als wirkliche Zehner, d. h. als Zusammenfassungen von 10 Einern, vorgestellt. Bei Benützung der Hunderterblätter z. B. wird die 2. Additionsaufgabe so gelöst, daß die Kinder das erste Blatt herumwenden mit den Worten „10 Zehner" — sie sehen ja die wirklichen Zehnerrhythmen; darauf das zweite mit den Worten: „20 Zehner." Nun zeigen sie auf dem 3. Blatte noch 5 Zehner und sprechen: „25 Zehner" usw. Etwas später — die Blätter reichen nicht aus, oder die Frage taucht auf, ob es nicht bequemer geht, oder die Kinder kommen selbst darauf — werden die Aufgaben auf einem einzigen Hunderterblatte vorgenommen. Allerdings: wo ein Ringel ist, wo wir uns also bisher einen Pfennig gedacht haben, müssen wir einen Zehner hinlegen, lauter blanke Zehnpfenniger auf das Hunderterblatt. Eine Hauptsache, die nicht übersehen werden darf, ist bei diesen und allen folgenden Aufgaben nach jeder Ausrechnung die Verwandlung der Groschen in Pfennige, der Zehner in Einer.

2. Addition und Subtraktion von Zehnern und Einern.

27 Zehner + 9 Einer	25 Zehner — 3 Einer
13 „ +46 „	36 „ —27 „
88 „ +65 „	44 „ —78 „

Während die erste Additionsaufgabe nur ein genaues Beachten der jeweiligen Systemeinheit und das Verwandeln der Zehner in Einer verlangt, fordert die zweite bereits ein Umwandeln der Zulegezahl in zweierlei Einheiten. Dabei soll natürlich nicht ausgeschlossen sein, daß die Kinder auch den Weg des Resolvierens

gehen[1]), also auch die erste Zahl von vornherein als Einer auffassen und rechnen: 130 + 46. Bei der wenig veränderten Aufgabe 63 Zehner + 46 Einer kann man dann zeigen, daß sie statt der 7 Hunderterblätter, die man bei Einerauffassung brauchen würde, ein einziges ausreicht, wenn man alles in Zehnern denkt und zuletzt 6 Einer hinzufügt[2]).

Die Übungen dieser Gruppe gehören zu den bedeutungsvollsten und müssen immer und immer wieder vorgenommen werden, und zwar bei der geringsten Unsicherheit mit erneutem Zehnerzählen an den Hunderterblättern oder anderen Rechenmitteln.

3. Addition und Subtraktion reiner Hunderter.

4 Hunderter + 5 Hunderter. 9 Hunderter — 2 Hunderter.

Diese Aufgaben scheinen wegen ihrer großen Leichtigkeit keinen Zweck mehr zu haben, aber sie mögen doch einigemal so gelöst werden, daß die Kinder tatsächlich Hunderterblätter herumwenden. Sie sollen nämlich einen „Begriff" davon bekommen, daß ein Hunderter in Wirklichkeit doch etwas anderes bedeutet als Einer und Zehner, und daß es gar keine so leichte Sache sein würde, auf die bezeichnete Weise 45 Hunderter und 38 Hunderter zusammenzuzählen. Daß man sich aber diese Arbeit außerordentlich vereinfachen kann, wenn man sich die Ringel als Markstücke denkt. Dann kommt man für die meisten Aufgaben mit einem Blatte aus. Als Aufgabengruppen kommen die unter 1 angeführten auch hier in Betracht, selbstverständlich mit jedesmaliger Verwandlung der Hunderter des Ergebnisses in Einer.

Die Behandlung derselben Aufgaben mit Verwandlung der Mark in Zehnpfenniger, der Hunderter in Zehner, führt zur folgenden Übungsreihe:

4. Addition und Subtraktion von Hundertern und Zehnern.

7 Hunderter + 3 Zehner. 8 Hunderter — 5 Zehner.

Die weiteren Gruppenbeispiele entsprechen denen bei 2, nur daß statt Zehner und Einer jetzt Hunderter und Zehner gesetzt werden. Auch hier arbeiten die Kinder erst kurze Zeit mit den vollen Hunderterblättern; dann werden die einzelnen Ringel als Zehner (Zehnpfenniger) angesehen, der frühere Zehner also jetzt als Hunderter.

[1]) Die Ausdrücke Resolvieren und Reduzieren sind dem heutigen Geschlechte mehr und mehr abhanden gekommen. Man braucht ihnen keine Träne nachzuweinen.

[2]) Interessierte Kinder, die den Sinn dieser Form verstanden haben, sagen dann wohl: „Aber die 6 Pfennige müssen wir uns in einem Häufchen auf dem nächsten Ringel liegen denken, und eigentlich gehörten noch 4 dazu."

Endlich rechnen sie — weil das „für den Geübten am bequemsten" ist — mit beiden Einheiten auf einem Zettel zugleich — ganz entsprechend den Ausführungen von 2.

5. Hunderter, Zehner und Einer.

Aufgaben wie 500 + 63 sind nicht nötig, obwohl man beobachten kann, daß die Kinder in allem Ernste „rechnen": Fünfhundert und dreiundsechzig sind fünfhundertdreiundsechzig. Es mag das daher kommen, daß unsere Kinder durchweg an das Ziffernrechnen gewöhnt sind und sich infolgedessen gar nicht bewußt sind, daß das **Stellen** einer solchen Aufgabe ja schon ihre **Lösung** enthält[1]). Diese Art von Aufgaben unterscheiden sich übrigens für das Kind ganz wesentlich von dem 1. Beispiel der Übungsreihe 2, das man wohl geneigt sein könnte, in gleicher Weise zu werten, wie die vorliegenden Aufgaben. Für den geförderten Schüler ist die Aufgabe in beiden Fällen die, Systemzahlen verschiedenen Stellenwertes einfach miteinander zu verbinden, ohne Umwandlung. Das Kind aber sieht in der Umkehrung der Wörter siebzig und neun zu neunundsiebzig eine besondere Schwierigkeit, die ihm bei der ersten Aufgabe der jetzigen (5.) Übungsreihe nicht begegnet.

a)	540 + 26	450 — 38
	560 + 64	610 — 56
b)	640 + 220	850 — 530
	470 + 380	720 — 440
c)	630 + 13 Zehner	660 — 34 Zehner
	360 + 25 „	710 — 23 „

Bei jeder der beiden Zahlen einer Aufgabe kommen 2 verschiedene Systemeinheiten in Betracht; Augend und Minuend enthalten immer Hunderter; im ersten von zwei Beispielen wird der Hunderter nicht überschritten, im zweiten geschieht dies. Bei a besteht die zweite Zahl aus Zehnern und Einern, bei b und c aus Hundertern und Zehnern, bei c in einer Benennung, die zunächst eine Umwandlung erfordert.

d)	514 + 60	472 — 30
	675 + 80	327 — 40
e)	425 + 62	677 — 34
	573 + 56	339 — 85
f)	225 + 510	786 — 450
	382 + 430	625 — 370

[1]) Es ist uns wiederholt begegnet, daß unser Hinweis auf diese Tatsache beim Kinde ein freudig erstauntes „Ach ja!" auslöste.

In diesen Beispielen tritt die erste Zahl dreigliedrig auf, die zweite Zahl bei a in einer, bei b und c in 2 Systemeinheiten.

g) 451 + 213 564 — 313
538 + 329 874 — 426
374 + 483 736 — 252
687 + 265 924 — 567

Hier erscheinen endlich beide Zahlen dreigliedrig, die Gedächtnisleistung ist von all den Übungsreihen nun am größten. Dabei steigern sich die Anforderungen an das Behalten während einer immer längeren Rechenarbeit: beim ersten Beispiel findet keine Überschreitung statt, beim zweiten nur die schon länger geübte Zehnerüberschreitung, beim nächsten Hunderterüberschreitung, beim letzten endlich Zehner- und Hunderterüberschreitung.

§ 29. Multiplikation und Division.

1. Die Zehnerreihe.

a) 9 · 50; 50 in 400.

Konkretisiert: 9 Brote zu 50 ₰ kosten ... kurz ausgesprochen: 9 · 50 = 450 ₰ = 4,50 ℳ. Für 4 ℳ erhält man ... solche Brote; kurz ausgesprochen: 50 ₰ in 400 ₰ ist 8 mal.

Hier empfiehlt es sich, die einzelnen Reihen in der Gegenüberstellung des Malnehmens und Enthaltenseins durchzuarbeiten, wiederum — wie die Beispiele andeuten — mit Betonung der Hauptfragen: Wieviel kosten ... Wieviel erhält man für ... und mit Hinzufügung der mathematischen Form. Wie die 50er-Reihe, so werden die der 20, 40, 80, 30, 60, 90 und 70 durchgenommen.

b) (150 : 3) · 7; (150 : 3) in 400.

Konkretisiert: 3 Stück ... kosten 1,50 ℳ; wieviel 7 Stück? und 3 Stück kosten 1,50 ℳ, wieviel bekomme ich für 4 ℳ?

Diese zweite Gruppe bringt also das Verteilen in Verbindung mit dem Malnehmen einerseits, mit dem Enthaltensein andrerseits. Auch hier empfiehlt es sich, die Reihen der 50, 20 usw. durchzuarbeiten.

c) 600 = 30 · 20 = 20 · 30 = 15 · 40 = 12 · 50 ...

Als Ergänzung zu diesen beiden ersten Gruppen tritt das Zerlegen in Faktoren mit der Hauptfrage: Wieviel kann ich kaufen? Z. B.: Wieviel Pfund Reis kann ich kaufen für 8 ℳ, das Pfund zu 30, 40, 50 ₰ usw.? Wieviel Meter Band für 7,50 ℳ, das Meter zu 60, 70, 80, 90 ₰?

d) $4 \cdot 50 = ? \cdot 100$.

Die verwandten Reihen sollen miteinander verglichen werden, die der 50 und 100, der 20, 40 und 80, der 30 und 60. Hierbei kann das Umkehren der Faktoren eine weitere Erleichterung finden durch Hinweis auf die Freiheit des Sprachgebrauchs. Während wir früher zeigten, daß $9 \cdot 4 = 4 \cdot 9$ sein müsse — vgl. S. 229 — so können wir jetzt darauf hinweisen, daß ich mir erst 60 vorstellen kann; und wenn das geschehen ist, so sagt einer: nimm sie mal 8! Es ist aber auch so möglich, daß ich erst höre: 8 mal . . . und nachher: 60. Dies führt nach und nach zu der Erfahrung, die aber durchaus nicht in eine Regel gekleidet zu werden braucht, daß es bequemer ist, sich einige große Zahlen vorzustellen, als viele kleine, bequemer also 8 Sechziger, als 60 Achten. Doch soll jede solche Vertauschung mit Bewußtsein vorgenommen werden, nicht als Produkt der Nachahmung des Lehrers.

2. Multiplikation zweistelliger Zahlen mit einstelligen und entsprechende Division.

a) $72 \cdot 4$. 66 in 396.

Wie bei 1a kommt das Malnehmen und das entsprechende Enthaltensein zunächst in Betracht. Jenes verursacht keine sonderlichen Schwierigkeiten; es handelt sich eben um die Teilrechnungen $70 \cdot 4$, $2 \cdot 4$, $280 + 8$; dies ist dem Kinde, das bisher richtig hat arbeiten dürfen, selbstverständlich und längst bekannt. Eher könnte es etwas stutzen bei der zweiten Aufgabe, die ihm allerdings konkretisiert geboten wird: 66 ₰ kostet ein Pfund Backpflaumen; ich kaufte für 3,96 ℳ. Doch ist ihm sofort die Beziehung klar, und die Ausführung erhebt nur zum Bewußtsein: Ich muß schätzen: 66 ₰ ist etwas mehr als 60; wenn 1 Pfund 60 ₰ kostete, so bekäme man für 3,60 ℳ 6 Pfund; und nun probiere ich $66 \cdot 6$, d. h. das Kind multipliziert aus, prüft nach.

b) 9 Stück kosten 2,25 ℳ; 7 Stück wieviel?
9 Stück kosten 2,25 ℳ; wieviel erhält man für 4 ℳ?

Die Division als Verteilen entspricht im übrigen der Form unter 1b.

c) Wieviel Pfund Zucker bekommt man für 5 ℳ, wenn das Pfund 24, 25, 26, 28, 30, 32 ₰ kostet? Zerlegt die 560!

Das Zerlegen in Faktoren, wobei eine zweistellige Maßzahl oder eine einstellige Divisorzahl den Anlaß bildet, entspricht sonst der Form 1c.

3. Multiplikation dreistelliger Zahlen mit einstelligen und entsprechende Division.

a) Reine Hunderter sind schon vielfach in leichteren Formen bearbeitet worden, z. B. 600 · 9; 500 in 2400. Doch bringen die Hauptfragen des Verteilens neue Übungsgelegenheit; z. B.

4 Pakete Papier wiegen 2800 g, 7 Pakete wieviel?

3 Sack Kartoffeln enthielten etwa 1500 Stück, 4000 Stück geben in wieviel Säcke?

Daran schließen sich Zerlegungsaufgaben wie: Zerlegt 4200 in verschiedene Hunderterzahlen!

b) Hunderter und Zehner:

420 · 8. 360 in 1500.

4 kg Kaffee kosten 13,60 *M*; 7 kg wieviel?

7 kg Kakao kosten 29,40 *M*; wieviel kg bekommt man für 21 *M*?

c) Hunderter, Zehner und Einer:

234 · 6. 234 in 1000.

5 kg Speiseöl kosten 8,75 *M*; 8 kg wieviel?

6 Ztr. Kartoffeln kosten 17,10 *M*; wieviel Ztr. erhält man für 31,35 *M*?

Bei allen diesen Aufgaben kommen für das Enthaltensein große Maßzahlen, für das Teilen zunächst nur einstellige Teiler in Betracht.

4. Multiplikation zweistelliger Zahlen mit zweistelligen und entsprechende Division.

27 · 36. 52 in 860.

Von hier aus kann sich nun die Übung in freierer Weise fortsetzen. Enthaltensein und Teilen, das bisher sinngemäß scharf auseinandergehalten wurde, gehen unmerklich in der Praxis ineinander über, womit natürlich nicht ausgeschlossen werden soll, daß ab und zu immer wieder der Sinn jeder der beiden Operationen festgestellt und ihre Behandlung gezeigt wird.

Über zweistellige Multiplikatoren hinauszugehen, hat keinen Zweck. Kein Erwachsener rechnet 587 · 35 im Kopfe. Kopfrechnen aber ist es, was bisher in Betracht kam.

Die vorstehende Übersicht soll nicht etwa schematisch maßgebend sein. Man kann sie sich vielfach anders zusammenstellen je nach den Verhältnissen, unter denen man arbeitet. Insbesondere wird die Rücksicht auf frühere Gewöhnung der Kinder stark mitsprechen. Auch braucht man gar nicht eigentlich alles durchzuarbeiten; auch dies wird von den besonderen Umständen abhängen.

Aber es ist nicht selten dem Lehrer erwünscht, den Aufgaben der Kinder bestimmte Richtlinien zu geben; dazu sollen die obigen Beispiele dienen. Sie haben den Zweck, die einzelnen Schwierigkeiten zum Bewußtsein kommen zu lassen, damit sie von den Kindern nach und nach überwunden werden können.

Die Behandlung dieses Abschnitts ist der des vorigen ähnlich in der gegenständlichen, später mindestens räumlichen Auffassung und in der überall zunächst einsetzenden symbolischen Darstellung. Dabei ist auf klares Darlegen des eingeschlagenen Weges zu halten, Selbstbilden der Aufgaben seitens der Kinder ist fortgesetzt zu üben.

Die Behandlung dieses Abschnitts unterscheidet sich aber auch von der des vorigen in gewisser Beziehung. Neben der symbolischen Darstellung wird das bloß vorstellende Rechnen mehr und mehr geübt und setzt sich — wo man soweit gehen kann — nach und nach an ihre Stelle. Damit hängt zusammen, daß auch die Benennung mehr und öfter wegbleiben kann, so daß in ebenso langsamem Fortschreiten auch ohne die Nötigung zu dinglicher oder symbolischer Vorstellung gerechnet werden darf. Allgemeines Ziel einer Klasse kann das aber nicht sein, sondern nur ein Zugeständnis an solche Kinder, die jederzeit in der Lage sind, ihre Befähigung zum Konkretisieren nachzuweisen; mit anderen Worten: Wir lassen die Abstraktion leise zu, aber nur die selbsterworbene, nicht die aufgenommene, die formulierte.

Endlich hat der vorstehende Abschnitt eine besondere Bedeutung. Während seiner Behandlung wird sich der Gebrauch der Ziffer immer dringlicher gestalten. Damit ist die Stelle gegeben, an der sie neben dem Zahlwort zur Stellvertretungsvorstellung des Zahlbegriffs werden darf. In einem späteren Abschnitt soll das noch ausführlicher dargelegt werden. Hier sei nur noch dies hinzugefügt, daß durch die wachsende Bedeutung der Ziffer nicht etwa die unterstützende Bedeutung der Raumvorstellung herabgedrückt wird.

Ehe wir weiter fortfahren in der Beschreibung des Lehrverfahrens, insbesondere zeigen, wie die Operationen auf der Oberstufe im Gebiete des Bruchrechnens und der übrigen Rechnungsarten durchgearbeitet werden, müssen wir erst, um das Bild des elementaren Rechenunterrichts möglichst zu vervollständigen, einige zusammenfassende Ausführungen bringen über Gedanken, die sich auf alle die bisherigen Bildungsstufen beziehen, daher bei den einzelnen nicht behandelt werden konnten. Sie betreffen zunächst allerdings nur die äußere Ausgestaltung. Die nach unserer Meinung ungleich

wichtigeren Ausführungen über die innere Gestaltung unseres künftigen Rechenunterrichts müssen wir zurückstellen, bis wir auch das Lehrverfahren der einzelnen Rechnungsarten der Oberstufe dargelegt haben.

5. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Zur äußeren Form der bisherigen Bildungsstufen.

§ 30. Die Hilfsmittel des elementaren Rechenunterrichts.

Es kann nicht die Aufgabe dieser Darlegungen sein, eine Übersicht über die vorhandenen Lehrmittel zu geben oder ihre größere oder geringere Zweckmäßigkeit zu erörtern. Das würde bei den ungefähr 400 verschiedenen Rechenmaschinen, die gegenwärtig auf dem Markte sein sollen, ein recht umfangreiches Unternehmen werden, dem der etwaige didaktische Gewinn nicht entspräche. Es kann sich vielmehr hier nur darum handeln, das Wesentliche herauszuheben, die inneren Beziehungen klarzustellen und die Grundsätze zu formulieren, die für die Beurteilung wie für die Handhabung der Rechenmittel maßgebend sind.

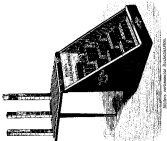
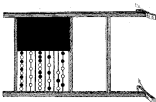
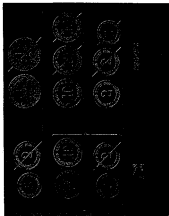
Aus der großen Zahl der Rechenmaschinen seien nur einige vorgeführt. Hierbei leitete uns der Gedanke, durchaus verschiedene Typen auszuwählen. Von den Entwicklungsformen dieser Typen kamen selbstverständlich aber nur solche in Betracht, die etwas in ihrer Art Vorzügliches darstellen.

Die Bayerische Rechenmaschine vertritt die Gruppe der „russischen Rechenmaschinen", die bewegliche Zählkörper an Drähten erscheinen und hin- und herrücken lassen (s. Seite 242 und 243).

Müllers verbesserter Rechenkasten ist eine Form des „Tillichschen Rechenapparats", der die Zahlen darstellt in rechteckigen Säulen mit Würfelteilung (s. Seite 242).

Das Nürnberger Rechenbrett von Troelitsch ist ein Vertreter derjenigen Gruppe von Apparaten, welche feste Zahlbilder mit Zahlkörpern ausfüllen (s. Seite 244).

Geidels Münzrechenbrett endlich zeigt, wie die Gegenwart nach neuen Wegen sucht und wie sie dabei Einzelaufgaben, wie der Einführung ins Zehnersystem, eine besondere Bedeutung beimißt (s. Seite 243).

Wer diese Lehrmittel — und alle die Hunderte von ähnlichen — gebrauchen, recht gebrauchen will, der muß ihren Sinn verstehen. Der kann ganz allgemein so ausgedrückt werden: In den Rechenlehrmitteln des Elementarunterrichts sollen Zählkörper die wirk-

Müllers verbesserter Rechenkasten.

Bayeri R hine

Geldels Münzrechenbrett.

Zählkörper
zur Bayerischen Rechenmaschine.

Das Nürnberger Rechenbrett von Troelltzsch.

lichen Dinge vertreten und darstellen. Dabei soll die wesentliche Gleichheit der Zählkörper die Kinder dazu führen, auch bei den rechnerisch zu bearbeitenden Dingen von jeder individuellen Verschiedenheit abzusehen. Weiter soll die Zahlvorstellung durch die Versinnlichung von einer Raumvorstellung begleitet und gestützt werden. Damit bekommen aber die Zählkörper überall einen symbolischen Charakter.

Die wichtigste Folgerung aus dieser Erkenntnis ist nun die, daß es notwendig ist, den Kindern diesen symbolischen Charakter zum Bewußtsein zu bringen, daß es also ein schwerer Irrtum ist, den Kindern gegenüber diesen Charakter zu verleugnen oder nicht genügend zum Ausdruck zu bringen. Dies geschieht aber überall dort, wo die Zählkörper gewissermaßen als die schulgemäßen Rechenlernmittel behandelt werden, hinter denen keine andere Wirklichkeit steht. Ein solches Verfahren ist nicht wesentlich verschieden von dem Verbalismus der früheren Jugenderziehung, bei dem auch das Wortsymbol als ausreichend zur geistigen Erwerbung der Sache angesehen wurde. Ein solches Verfahren kann wohl die Kinder dazu führen, mit Rechenklötzchen oder Kugeln „rechnen" zu können; es läßt sie aber versagen, wenn sie mit Gurken und Pflastersteinen, mit Bäumen und Geld rechnen sollen. Eine solche Erfahrung führt dann leicht zu der Anklage, daß die Abstraktion nicht ausreichend berücksichtigt worden sei, woraus sich die Forderung ergibt, die Abstraktion viel mehr zu pflegen. Diese Forderung löst sich aber auf in die andere, von diesen Rechenlehrmitteln möglichst bald loszukommen. Die Entstehung dieser Forderung ist ein kennzeichnendes Beispiel dafür, wie Unklarheit in der Erkenntnis psychischer Vorgänge und der tatsächlichen Zusammenhänge zu anscheinend ganz richtigen, in Wahrheit aber zu den verkehrtesten Folgerungen führen kann.

Psychologisch liegt die Sache aber so, daß es erste Aufgabe des Unterrichts sein muß, die Kinder in die mathematische (d. h. hier zunächst: zählende) Erfassung der Wirklichkeit einzuführen. Die symbolische Darstellung der Wirklichkeit bedeutet schon eine höhere Stufe, bedeutet in der Tat eine Abstraktion, mit der selbstverständlich nicht begonnen werden, sondern die erst nachfolgen darf.

Auf die durch das Rechenlehrmittel zu gewinnende Raumvorstellung, welche die Zahlvorstellung unterstützt, ist bis jetzt noch nicht soviel Wert gelegt worden, als nötig ist. Wir haben das wiederholt an anderen Stellen ausgeführt und können darauf verweisen (s. S. 163, 170, 188, 218 usw.).

Der symbolische Charakter der Zählkörper und die mit ihnen gegebene Raumvorstellung stellen nun das Gemeinsame der üblichen Rechenlehrmittel dar. Ihm gegenüber scheinen die kennzeichnenden Unterschiede der einzelnen Gruppen auch auf erhöhte innere Bedeutung hinzuweisen. Folgendes wäre hervorzuheben. Während die russische Rechenmaschine den Ton legt auf die Auffassung der einzelnen Zählkörper, hebt der Tillichsche Rechenkasten die Auffassung der Einheit der zu einer Zahl gehörigen Teile hervor. Jene ist mehr analytisch wirksam, dieser mehr synthetisch. Das bedeutet, daß jeder der beiden Typen vor dem andern einen Vorzug, zugleich aber auch einen nicht geringen Nachteil dem andern gegenüber hat. Denn Analyse wie Synthese der Zahlauffassung sind beide gleich notwendig. Allerdings ist der Nachteil nicht allzu bedenklich, wenn der Lehrer sich klar ist über die Eigenart des zu seiner Verfügung stehenden Apparats. Denn dann wird er eben sein Augenmerk darauf richten, diesen Nachteil durch besondere Übungen oder auf irgendeine andere Art auszugleichen.

Gemeinsam freilich ist beiden Gruppen von Rechenapparaten noch der andere Nachteil, daß sie auch den noch Ungeübten das Überblicken längerer Reihen bis zur 10 zumuten. Das ist der eigentliche Grund, welcher als Gegenwirkung gegen diese beiden Typen die ganze Gruppe der Zahlbilderapparate entstehen und große Verbreitung gewinnen ließ durch ihre in die Augen springende Erleichterung der Zahlauffassung infolge der rhythmischen Gliederung. Ähnlich wie bei den russischen Rechenmaschinen herrscht bei ihnen allen der analytische Charakter vor, was wiederum zu den mannigfachsten Versuchen des Ausgleichs geführt hat.

Geidels Münzrechenbrett vertritt alle die außerhalb der drei genannten Typen bestehenden Apparate. Es will insonderheit die starke Symbolisierung der anderen Rechenlehrmittel vermeiden, deren Zählkörper doch möglichst qualitätlose Einheiten darstellen

sollen. Dies erfordert natürlich dann einen Ausgleich, wenn die Aufgabe der Abstraktion dringlicher wird.

Aus dieser kurzen Andeutung der inneren Unterschiede der gebräuchlichen Lehrmittel dürfte zweierlei hervorgehen: Zunächst dies, daß sie alle recht brauchbar sind; daß aber keines so in die Augen springende Vorteile den andern gegenüber aufweisen kann, daß es als das beste bezeichnet werden dürfte. Daher möchte sich jeder Lehrer recht klar darüber werden, was sich mit dem ihm zur Verfügung stehenden Lehrmittel erreichen läßt, und nach welcher Richtung er zu ergänzen hat. Daran schließt sich unmittelbar der andere Gedanke, daß es zweckmäßig ist, mit mehreren Rechenlehrmitteln zu arbeiten, vor allem mit solchen, die sich innerlich ergänzen. Dieser Gedanke wird auch nahe gelegt durch die Zielstellung der Beherrschung der Abstraktion in bezug auf Zahlauffassung und Operationen. Bei mehreren Anschauungsmitteln wird die Abstraktion gründlicher und sicherer erreicht.

Des weiteren sei eines Rechenlehrmittels gedacht, um das die Methodiker in erbittertem Streite liegen, das sind die Finger des Kindes. Es hat hier keinen Zweck, auf das Für und Wider näher einzugehen; es sei vielmehr als Ergebnis langer Erfahrung und Studien folgendes hingestellt: Die Finger sind als Rechenlehrmittel recht gut brauchbar in der Hand des tiefer blickenden Erziehers, der sich ihres symbolischen Charakters stets bewußt ist, ebenso der Mangelhaftigkeit ihrer synthetischen Wirkung, endlich ihrer geringen Tragweite, die ja nur bis 10 reicht. In jeder dieser Beziehungen möchte für geeignete Ergänzung gesorgt werden. Demgegenüber haben sie aber zwei kaum hoch genug anzuschlagende Vorzüge: Sie sind immer zur Hand, und jedes Kind kann mit ihnen arbeiten. Auf diesen Gedanken muß noch näher eingegangen werden. Zunächst sei als Ergebnis festgestellt: Die Finger sind ein gutes Rechenlehrmittel, sie dürfen aber nicht das einzige sein. Außerdem sind sie ihres symbolischen Charakters wegen für den Anfang nicht geeignet. Ähnliches gilt von Linsen, Steinchen, Perlen, Aprikosen- und Pfirsichkernen, Kastanien sowie von Streichhölzchen, Legestäbchen usw. Sie bilden mit den Fingern zusammen eine 5. Gruppe der Rechenlehrmittel. Die meisten von ihnen könnte man natürliche nennen im Vergleich zu den Gruppen der künstlichen. Die meisten sind auch fast kostenlos zu beschaffen, was in vieler Augen kein Vorzug ist. Gemeinsam mit den Fingern haben sie die symbolische Natur und den analytischen Charakter, überlegen sind sie ihnen darin, daß sie in ihrer Anzahl nicht so beschränkt sind, und daß sie beliebige Gruppierungen

zulassen. Das sind immerhin einige Vorteile, denen freilich ein nicht unwichtiger Nachteil gegenübersteht.

Von allen den bisher besprochenen Rechenlehrmitteln erwarten wir, daß sie nicht nur der Zahlauffassung dienen, sondern daß mit ihnen auch die Operationen darzustellen sein sollen. Ja, der Pädagog von gestern und der Laie sind geneigt, die Güte und Zweckmäßigkeit eines Lehrmittels einzig nach diesem Gesichtspunkte zu beurteilen. Seine Bedeutung steht außer allem Zweifel. Nun vergegenwärtige man sich, in welchem Maße die verschiedenen Gruppen der Lehrmittel dieser Forderung entsprechen. Da zeigt es sich, daß beim Zusammenzählen und Abziehen, beim Zerlegen und Ergänzen mit kleineren Zahlen wesentliche Unterschiede nicht auftreten, daß aber sofort ganze Gruppen ungünstig abschneiden, sobald es sich um etwas größere Zahlen handelt. Wenn an der russischen Rechenmaschine die 37 steht, so läßt sich die Addition 37+25 mit 4 Griffen bewerkstelligen. Ebenso ist es beim Tillichschen Rechenkasten und bei einigen Formen der 3. und 4. Gruppe. Die übrigen alle aber bedürfen dazu einer größeren Zahl von Handgriffen und infolgedessen einer beträchtlich längeren Zeit, nämlich überall dort, wo das Lehrmittel nur Einereinheiten und nicht auch höhere (Vierer-, Siebener-, Zehnereinheiten usw.) bietet. Sowohl für die Auffassung wie für die Darstellung ist die Bearbeitung von Einereinheiten recht wenig förderlich. Das Vorhandensein größerer Einheiten fällt also zugunsten der genannten Gruppen stark in die Wagschale, und daraus erklärt es sich, daß insbesondere ein Vertreter der beiden ersten Gruppen sich gemeinhin auch in der einfachsten Schule vorfindet.

Es braucht ja eigentlich nur darauf hingewiesen zu werden, um den erfindungsreichen Lehrer zu veranlassen, diesen Mangel, der sich vor allem bei den natürlichen Rechenmitteln findet, möglichst auszugleichen. Er wird Perlen mittels eines Fadens zu Fünfer- und Zehnerringeln, Streichhölzchen und Legestäbchen zu Zehnerbündeln, Kastanien mittels eines Drahtes zu ebensolchen höheren Einheiten herrichten lassen. Das wird in vielen Fällen mit rechter Befriedigung geschehen.

Endlich kommen wir zu der wichtigsten Forderung, die an ein Rechenlehrmittel zu stellen ist. Wir haben sie schon andeutungsweise berührt. Es ist die, daß die Kinder damit arbeiten können. Die psychologischen Ausführungen über die Bedeutung der Tastempfindungen für unsere Raum-, Zeit- und Zahlvorstellungen, über die Bedeutung des manuellen Tuns für die Gefühlsbetontheit, endlich über die Bedeutung der Eigentätigkeit für die Erwerbung und Festigung von Vorstellungen und Begriffen brauchen hier nicht wiederholt zu werden. Es genügt der Hinweis darauf,

und allenfalls die Ergänzung, daß wir mit Rechenlehrmitteln für die Hand der Kinder vor allem auch denjenigen Auffassungstypen gerecht werden, bei denen das motorische Element stark hervortritt. Da der rein akustische Typus ganz selten, der akustisch-motorische dagegen recht häufig ist, so berücksichtigen wir mit Rechenlehrmitteln „für die Hand der Kinder" alle diejenigen, denen nach ihren psychischen Anlagen das Anschauungsmittel nicht genügen kann.

Unter diesem Gesichtspunkte der kindlichen Betätigung gewinnen nun verschiedene Gruppen von Lehrmitteln, die vorhin stark zurücktreten mußten, neuen Glanz gegenüber ihren Mitbewerbern. Denn dieser Forderung, daß die Kinder mit dem Lehrmittel arbeiten müßten, ist selbstverständlich nicht im mindesten genügt, wenn ein Kind vortreten darf, um an der russischen Rechenmaschine irgendwelche Operation auszuführen. Alle diese Demonstrationsapparate, die nur in einem Stücke in der Klasse vorhanden sind, können eben dieser Forderung nicht genügen. Das ist nur möglich bei solchen Lehrmitteln, welche jedes Kind in seinem Besitze hat oder zu eigner Betätigung überlassen bekommt. Selbstverständlich sollen damit die Demonstrationsapparate nicht als wertlos bezeichnet werden, keinesfalls, aber sie bedürfen unbedingt der Ergänzung durch ein Lehrmittel für die Hand der Kinder.

Bis jetzt haben wir versucht, unsere Ansicht über die Menge der verschiedenen Lehrmittel begründend und ableitend darzustellen. Es dürfte vielleicht nicht uninteressant sein, kurz zu zeigen, wie sich diese Gedanken entwickelt, diese Ansichten herausgebildet haben.

Wir sahen, wie die Rechenlehrer unserer Kinderjahre zum Teil recht gute Erfolge aufzuweisen hatten, obwohl sie nur mit einer russischen Rechenmaschine allerdürftigster Art und mit den Fingern arbeiten ließen. Wir erleben weiter in eigener Praxis das jahrelange Unbefriedigtsein mit den erzielten Erfolgen und sahen bei den Amtsgenossen dieselbe Not, die ihren Ausdruck fand in dem Streit der Zähler und Anschauer, in der Bekämpfung und Befürwortung der Finger als Anschauungsmittel, in dem Erscheinen aller möglichen „Rechenübungen" und in der Erfindung immer neuer und besserer Rechenmaschinen. Es war anzunehmen, daß die Praxis dann, wenn sie noch 1000 oder 2000 neue Rechenmaschinen erfunden haben würde, an dem Ziele angelangt sein könnte, zu sagen: Jetzt haben wir die denkbar zweckmäßigste Form und Methode. Diesen langen Weg — es ist der der chinesischen Entwicklung — abzukürzen, dazu ist aber die Wissenschaft berufen. Und so suchten wir die Grundlagen zu erforschen, auf denen das Rechnen

überhaupt aufbaut, und die auch das Wirken eines Rechenlehrmittels bedingen[1]).

Diese Grundlagen waren wesentlich in der Kenntnis der psychischen Entwicklung des Kindes zu suchen, wie sie nicht eine deduktive, sondern eine induktive exakte Wissenschaft feststellt. Diese Studien führten — in fortwährender Wechselwirkung mit den durch sie veranlaßten Variationen und Beobachtungen der Praxis — zu den Ergebnissen, die in dem vorliegenden Buche niedergelegt sind. Im besonderen erwiesen sie die hohe Bedeutung der Rechenlehrmittel, ferner die Grenze für deren Wirkungsbereich, endlich die Grundsätze, welche für die Beurteilung eines Rechenlehrmittels in Betracht kommen.

Diese letzteren mögen hier zusammengefaßt werden wie folgt: Es ist zu untersuchen: 1. in welchem Maße seine Einheiten symbolischen Charakter haben; 2. in welchem Maße es der analytischen Zahlauffassung einerseits, der synthetischen andrerseits Rechnung trägt; 3. in welchem Maße es rhythmisierende Zahlauffassung gestattet; 4. in welchem Maße es für die Ausführung der verschiedenen Operationen geeignet ist; 5. in welchem Maße es das Hantieren mit größeren Zahlen gestattet; 6. ob es den einzelnen Kindern in die Hand gegeben werden kann; 7. ob es wohlfeil ist.

Hierzu sei noch folgendes bemerkt: Ein Lehrmittel mit stark symbolischem Charakter der Einheiten, wie ihn die Kugeln der Rechenmaschine oder die Zahlbilder tragen, taugt weniger für den Anfang; da kommt eben das wirkliche Ding in Betracht. Erst wenn man die Dinge symbolisieren lassen kann durch jene Einheiten, ist die Verwendung eines solchen Lehrmittels am Platze. Die überwiegend analytische Betrachtungsweise der Kugeln der russischen Rechenmaschine und der Kreisscheiben der Zahlbilder einerseits, die überwiegend synthetische der Zahlsäulen des Tillichschen Rechenkastens hat zu den mannigfachsten Versuchen der Abschwächung und Ergänzung geführt. In bezug auf rhythmisierende Zahlauffassung sind alle Zahlbilderapparate sämtlichen anderen ganz bedeutend überlegen, und ein Ausgleich ist hier vielfach unmöglich. Die Beweglichkeit größerer Einheiten läßt die künstlichen Lehrmittel vor den natürlichen einen beträchtlichen Vorsprung gewinnen; Versuche zu dessen Einholung sind schon angedeutet worden — dies gilt für die beiden Punkte 5 und 6. Den „Rechen-

[1]) Es ist auf allen Gebieten des Lebens so, daß die Praxis zu ungeahnter Leistungsfähigkeit in die Höhe schnellt, wo sie sich den Anforderungen der Wissenschaft fügt und ihren Anregungen nachgeht. Die gesamte technische, wirtschaftliche und sozialpolitische Entwicklung des 19. Jahrhunderts ist dafür ein einziges glänzendes Zeugnis. Freilich muß der Wissenschaftler nicht nur die Ziele, sondern auch die Grundlagen und Mittel der Praxis wirklich kennen, d. h. auf das vorliegende Gebiet angewendet, nicht nur Objekt oder Beobachter gewesen sein.

apparaten gegenüber haben die natürlichen wieder den durch nichts aufzuwiegenden Vorzug der Eigentätigkeit des Kindes und endlich auch den öfters bedeutsamen der Wohlfeilheit. — Zusammengefaßt: kein Rechenapparat ist ein Universallehrmittel, weil in keinem die in Betracht kommenden Anforderungen gleichzeitig erfüllt werden können.

Diese Erkenntnis suchte nun nach Abhilfe zunächst an den bedeutsamsten Stellen. Zuerst wurden die natürlichen Rechenlehrmittel stark herangezogen. Da weiter eine russische Rechenmaschine zur Verfügung stand, nahmen wir Fühlung mit den Eltern der schwächeren Kinder, und es gelang, daß diese und dann auch andere solche kleine Handmaschinen mitbrachten. Damit war sehr viel gewonnen. Wir änderten ferner die Zehnerreihen der Rechenmaschinen in der früher angedeuteten Weise zu Zehnerzahlbildern. In vorsichtig prüfender Weise gewannen wir die Einsicht, daß die bisherigen Lehrmittel zu allermeist der Operationsauffassung zu dienen in der Lage seien, der Zahlauffassung nur in einem beschränkten Umfange, der Operationsdarstellung und der Zahldarstellung überhaupt nur, soweit sie in den Händen der Kinder waren und mit kleineren Zahlen hantierten. Damit zugleich bildete sich die Überzeugung von der Notwendigkeit der entsprechenden Betonung auch dieser anderen rechnerischen Betätigungen im elementaren Unterricht. Sie führte zur Herstellung des Hunderterzahlbildes durch die Kinder, später zur Abänderung der Form seiner Einheiten als Ringel und zu seiner Vorbereitung durch den Druck[1].

Der geförderte Einblick in die Art und die Wirkungsmöglichkeit der Apparate, die Heranziehung der natürlichen Lehrmittel und die Herstellung der Hunderterbilder waren nicht die einzigen Früchte dieser Studien in bezug auf die äußeren Hilfsmittel zur Einführung in die Welt der mathematischen Vorstellungen und Begriffe. Wir haben in ihrem Lichte vielmehr noch manches andere Lehrmittel erprobt und möchten auf einige hinweisen, deren Benutzung wir warm empfehlen können.

Dabin gehört in erster Linie das wirkliche Geld. Es hat denselben Nachteil wie die Finger, die nur in beschränkter Anzahl vorhanden sind; auch von wirklichem Gelde kann man bei dem

[1]) Die Erfahrungen mit den Hunderterbildern sind recht befriedigend. Ich bitte die Amtsgenossen an Schulen aller Art, sie unter den oben dargelegten Gesichtspunkten ansehen und nachprüfen zu wollen. Ich bilde mir nicht ein, ein ideales Lehrmittel damit geschaffen zu haben. Daß ein solches unmöglich ist, habe ich schon ausgeführt. Nur an bestimmter Stelle sollen die Bilder ihre Pflicht tun. Sie sollen auch nicht die bisherigen Apparate verdrängen, vielmehr sie zur rechten Wirkung kommen lassen. Was sie hauptsächlich wollen, ist, zu viel reicherer und tieferer Zahlauffassung und zu vielfach vermehrter Eigentätigkeit zu führen.

einzelnen Kinde nicht auf größere Summen rechnen. Aber 10 einzelne Kupferpfennige hatte jedes Kind bald gesammelt und hütete sie wie einen Schatz. Gerade in dieser Erscheinung, in der ungemein starken Gefühlsbetontheit dieses Lehrmittels, liegt sein großer Vorzug vor anderen. Rechnen mit **richtigen** Pfennigen, bei denen so und so oft festgestellt werden muß, daß nicht etwa einer fehlt, heruntergefallen oder zum Nachbar hinüber geratscht ist, das ist etwas ganz anderes, als Rechnen mit Kugeln an der Rechenmaschine oder mit Klötzchen oder ähnlichen Dingen. Richtig bezahlen, richtig kaufen, richtig borgen und wiedergeben, gelegentlich auch einmal richtig wechseln, das übt einen besonderen Zauber auf das kindliche Gemüt aus, selbst dann, wenn es weiß, daß am Ende der Stunde die früheren Eigentumsbeziehungen wieder hergestellt werden. Man darf behaupten, daß bei 6—7jährigen Kindern das eigene Interesse für das Rechnen im allgemeinen noch recht schwach ist. Das hängt zusammen mit der Entwicklung der Zahlbegriffe, wie wir sie ja schon dargelegt haben. Es ist daran zu erinnern, daß das Kind verhältnismäßig wenig Gelegenheit hat zu gefühlsbetonter Beschäftigung mit den Zahlen. Ob 5 oder 7 Apfelsinen in Betracht kommen, regt das Kind nicht eben auf, es bekommt ja weder die fünf noch die sieben, auch zu Hause nicht, höchstens eine auf einmal, in der Mehrzahl der Fälle aber auch noch nicht dies, sondern nur ein Stückchen. Auch die Zahlenverhältnisse des übrigen Lebens erschließen sich erst nach und nach dem Kinde als wertvoll. Aber auch das 6jährige Kind hat meist schon ein sehr lebhaftes Wertgefühl für das Eigentumsrecht an 10 Pfennigen, von denen die Mutter gesagt hat: „Daß du ja keinen verlierst!" und es gerät in mehr oder minder große Trauer, wenn dies dennoch geschieht. Hier ist also die Stelle, von welcher aus das Kind Verständnis für die Größenwerte des Lebens gewinnt, und darum möchten wir das wirkliche Geld als Rechenlehrmittel der Unterstufe nicht missen.

Mancher Pädagog wird ja vielleicht Bedenken haben gegen ein solches Lehrmittel; er wird glauben, dabei sei die Versuchung zur Unehrlichkeit in hohem Grade zu fürchten. Wir können ihm aus Erfahrung versichern, daß solche Bedenken gegenstandslos sind oder mindestens gegenstandslos gemacht werden können. Wir versuchten es so, daß zu Anfang jeder Übung der Besitzstand eines jeden Kindes von ihm und seinem Nachbar festgestellt wurde, und zwar so, daß die 10 Pfennige in der Form des üblichen Zehnerbildes aufgelegt wurden. Erst wenn unter gegenseitigem Zeugnis festgestellt war, daß alles stimmte, begannen die Übungen. Und nachdem sie beendet waren, wurde wieder gezählt und kontrolliert. Auch in praktischer Hinsicht halten wir dies Umgehenlernen mit

Geld für wertvoll. Dem 7jährigen Kinde möchten wir doch auch außer der Schule 50 ₰ oder später 1 ℳ anvertrauen können. Es ist selten vorgekommen, daß Geld verloren worden war, und es hat sich regelmäßig wiedergefunden. Ein „Zählgeld" von Groschen würde schon für einen längeren Zeitraum reichen bei wirklichen Verlusten. Diese von vornherein auszuschließen, war natürlich unser eifriges Bestreben. Wir glaubten, dies damit verwirklichen zu können, daß wir eben schon frühzeitig und von vornherein die Kinder gewöhnten an unbedingte Gewissenhaftigkeit im Verkehr mit Geld. Wir haben beobachtet, daß im 6—7jährigen Kinde wohl das Gefühl für das Mein und Dein schon ziemlich ausgebildet ist, nicht in gleichem Maße aber das Gefühl für die Rechtlichkeit des Erwerbs. Nicht wenige Kinder dieses Alters stehen noch auf dem Standpunkte: Was ich dir weggenommen habe, das ist nun mein. An den Gedanken der Rechtlichkeit des Erwerbs aber gewöhnen wir die Kinder dadurch, daß wir ihnen recht oft Gelegenheit geben, diesen Gedanken zu betätigen, daß wir sie in die Lage versetzen, mit fremdem Gute umzugehen, ohne sich an ihm zu vergreifen. Nicht die Bewahrung vor der Möglichkeit der unsittlichen Tat, sondern die Gewöhnung an die sittliche Tat selbst ist die einzig wirksame Form der sittlichen Erziehung. Und die wollten wir sogar im Bereich der Lehrmittel des Rechenunterrichts treiben.

Als Ersatz für Geld werden von manchem Methodiker Spielmarken empfohlen. Wenn sie auch bei weitem nicht die starke Wirkung des „wirklichen" Geldes haben, so sind sie doch an zwei Stellen gut zu brauchen: für die Zahlbilder bis zur 10 und die Operationen an ihnen, und dann für die Einführung ins System, wo wir die verschiedenfarbigen als Zehnpfenniger, Pfennige und Mark gegeneinander auswechseln können.

In diese Gruppe der Lehrmittel lassen sich auch rechnen: Würfel, Dominosteine, Spielkarten und Zahlbilderblättchen, deren Verwendung wir an geeigneter Stelle schon gezeigt haben, und zwar nicht nur für Zahlauffassungsübungen, sondern auch für die Übung sämtlicher Operationen. Übrigens braucht man in der Schule meist nur die Anregung zu geben, um die Kinder diese Übungen zu Hause mit Eifer vornehmen zu lassen. Auch braucht es nicht weiter ausgeführt zu werden, daß Spielmarken und die eben genannten Lehrmittel erst als solche zweiter Linie in Betracht kommen.

Viel wichtiger wieder als sie ist als Rechenlehrmittel das Metermaß. Als Lineal möchte es in der Hand jedes Kindes sein, außerdem aber auch der größeren Länge wegen in der Gestalt des Bandmaßes, das in jeder Familie zu finden ist, und das man

in den Schneidergeschäften schon für 10 ₰ bekommt. Über seine für den Unterricht zweckmäßigste Gestaltung haben wir schon gesprochen (S. 183). Es ist für das 2. und 3. Schuljahr ein ganz unentbehrliches Hilfsmittel. Die Kinder messen aus eigenem Antriebe bald alle Längen, die ihnen unter die Hände kommen. Dabei ist es zu empfehlen, dann und wann die Anregung zu geben zum Merken der Längen: „Wie lang war gleich dein Federkasten? Du hast es vergessen? Miß schnell noch einmal! Wer hat sich gemerkt, wie lang sein Kästchen ist? Meßt nach, ob es richtig war!" usw. Und so werden alle Längen der Schulstube — auch Bankentfernungen, Fensterscheiben, Höhe der Blumenstöcke usf. — und des Hauses möglichst genau festzustellen und zu einem guten Teil auch im Gedächtnis festzuhalten gesucht. Es ist selbstverständlich, daß wir dabei längere Zeit nur mit Zentimetern messen, und daß wir wesentlich später, jedenfalls erst nach Eintritt in das System, auch Meter und Millimeter gebrauchen. Besonders günstig wirkt beim Metermaß, daß es der Zahlenreihe eine ihr völlig entsprechende Raumreihe an die Seite stellt. Wir wissen, daß diese Auffassung einseitig ist, aber ebenso auch, daß gerade diese eine Seite sehr berechtigt und notwendig ist. Für andere Auffassungsformen benutzen wir andere Hilfsmittel. Auch für die sämtlichen Operationen der ersten Gruppe ist das Metermaß vortrefflich zu gebrauchen. Mit besonderem Nachdruck drängt sich dabei dem Kinde der Gedanke auf, daß es zweckmäßig sei, beim Zusammenzählen erst den Zehner aufzufüllen, beim Abziehen erst bis zum Zehner zurückzugehen. Interessant für die Kinder und bildend ist auch das Verfahren, daß benachbarte Kinder mit ihren beiden Maßen zusammenarbeiten. Beim Addieren z. B. wird der erste Summand auf dem linken Maße gezeigt, der zweite auf dem rechten und dies an dem Ende des ersten Summanden angesetzt, worauf auf dem übrigen Stück des linken Maßes sofort das Ergebnis abgelesen werden kann. Selbstverständlich ist hierbei nicht beabsichtigt, den Kindern das Rechnen zu ersparen, wie der oberflächlich Urteilende wohl meinen könnte, sondern ein Hineinleben in die Fortgesetztheit der Zahlenlinie, von welcher wir mit unseren Additionen immer nur kleinere, aber unmittelbar aneinanderstoßende Stücke in Betracht ziehen. Ganz ähnlich geht die Subtraktion vor sich, die Beziehungen zwischen Subtraktion und Zerlegen treten recht klar zutage, und auch das Vergleichen und Ergänzen erhält eine neue Stütze sinnlicher Art. Daß natürlich solche Übungen nicht abstrakt und für die Kinder anscheinend zwecklos angestellt werden dürfen, sondern daß sie mit dem frischen Blüten- und Blattwerk kindlichen Lebens zu umgeben sind, dieser Gedanke bedarf für den erfahrenen Erzieher keiner weiteren Ausführung.

Als weiteres Lehrmittel — noch für die Unterstufe — empfehlen wir angelegentlichst, die Kinder auch mit der **Wage** hantieren zu lassen. Sie soll also nicht Demonstrations-, sondern Arbeitsgerät sein, und zwar in weitestem Umfange. Das mindeste in dieser Beziehung möchte es sein, daß in jedem Schulzimmer eine Wage mit Gewichtssatz sich befindet, auf der die Kinder wechselweise wiegen können, was ihnen unter die Hand kommt: ein Lesebuch, einen Federkasten, das Frühstück, einen Apfel, einen Brief usw. Man muß es selbst erfahren haben, wie alle Einlernen von Kilogramm und Gramm, ja selbst wiederholte Demonstrationen auf der Wage und Gewichtstafeln, die im Zimmer hängen, einen Teil der Kinder nicht vor Verwechslungen schützt, die dem getreuen Lehrer fast unbegreiflich vorkommen. Man muß aber auch sich darauf besinnen können, wie man als Junge ungezählte Male den Wunsch gehabt hat, mit wiegen zu dürfen im Kaufmannsladen; und man muß endlich der eigenen Erinnerung oder der Beobachtung an den Kindern entnehmen können, welch prickelnden Reiz dies erste Erlebnis des „Wiegendürfens" ausübt — um aus alledem zu erkennen, wie die Bekanntschaft des Kindes mit unseren Maßen unsicher und langsam erworben wird durch Rezeption, durch akustische oder visuelle, dagegen rasch und sicher durch Handlung, durch Eigentätigkeit. Darum wären 3 Wagen besser als eine, und außerdem gehörte noch auf einen passenden hellen Platz des Schulvorsaals eine richtige **Dezimalwage**.

Endlich gehört in jedes Klassenzimmer für die Zwecke der mathematischen Bildung eine **Wanduhr**. Sie mag an der Rückwand des Zimmers sich befinden. Stören wird sie uns ebensowenig, wie uns die Stubenuhr beim Arbeiten stört. Wir würden sie auch aus anderen Gründen gerne sehen. Denn die Zeit, in der der Schüler mit einem Blicke nach den weiß angestrichenen Fensterscheiben seufzte: Ist denn die Stunde noch nicht bald herum! ist hoffentlich nun bald vorüber. Wir erleben jede Woche mehrmals den entgegengesetzten Wunsch, und das Bedauern, daß die Stunde schon herum ist. Wir sind auch überzeugt, daß das eine notwendige Wirkung des neuen Geistes ist, der durch die Schulen weht, und daß das jeder Erzieher übereinstimmend erfährt, der mit diesem neuen Geiste und mit warmem Herzen seinem Berufe lebt. Uns ist's also überhaupt lieb, wenn die Schüler mit einem Blicke nach der Uhr sagen: O, schon so spät! Ganz besonders wirksam aber halten wir es für die mathematische Bildung auch schon der Unterstufe. Das Gefühl für den Wert der Zeit läßt sich nur am Wertmesser erwerben, genau so, wie eine Beurteilung von Raumgrößen nur dem möglich ist, der tausend- und abertausendmal sein Metermaß benutzt hat.

Wir können der Versuchung nicht widerstehen, an dieser Stelle ein wenig den Propheten zu spielen. Wir blicken in eine Zeit, wo die meisten der schönen Rechenmaschinen der Gegenwart nur noch in Schulmuseen den staunenden Blicken gezeigt und den geschichtlich Interessierten erklärt und vorgeführt werden; wo die Schule auch in diesem Stücke die Verbindung mit dem wirklichen Leben gesucht und gefunden haben wird, daß sie rechnen lehrt an den Dingen, und daß die Maße der Dinge, Geld und Metermaß, Wage und Uhr, ihre wichtigsten Rechenlehrmittel geworden sein werden. Ob diese Zeit noch fern ist[1])?

§ 31. Die mathematische Form.

Wenn wir hören: 15 durch 3, so tritt uns gleichzeitig das Ergebnis 5 ins Bewußtsein. Dabei sind die meisten von uns gar nicht imstande, zu glauben, daß in dieser Assoziation für das Kind irgendeine Schwierigkeit vorliegen könne; zumal, wenn vorausgesetzt wird, daß schon öfter Fünfen addiert wurden, daß die Summe 15 dabei ins Bewußtsein des Kindes trat, daß auch die Multiplikation der Fünf dagewesen sei, daß endlich sogar schon Verteilen und Messen geübt worden wäre. Und doch müssen wir uns darüber klar werden, daß das Kind wohl imstande wäre, auszurechnen: Wenn ich 15 Nüsse unter 3 Kinder verteile, so bekommt jedes 5 — daß es aber nicht ohne weiteres imstande ist, die Form zu verstehen: 15 durch 3 ist 5.

Dem pädagogischen Leser, den diese Behauptung immer noch befremden sollte, stellen wir folgende Erfahrungen zur Verfügung. Unsere Kinder arbeiten die Exempel des Rechenbuches öfter voraus. Da ist es uns nicht selten begegnet, daß sie sagten: Rechnen kann ich jedes Exempel, aber ich weiß nicht, wie ich's schreiben soll. Dies geschah bei folgenden Aufgaben: Wieviel Pfennige fehlen an 1 ℳ, wenn du einen Fünfziger hast? Wieviel Zehner bekommst du für 30 ₰? Zahle 28 ₰ so, daß 2 Zehner dabei sind! Du sparst jede Woche 5 ₰; wieviel Wochen hast du gespart, wenn du 35 ₰ beisammen hast? Wieviel Bleistifte zu 10 ₰ kannst du für 8 Fünfer kaufen? Welche Zahl ist die 6. Zahl in der Achterreihe? Wie oft kannst du 9 von 11 und 12 und 13 wegnehmen? Wieviel ist die Hälfte von 20? Du sollst 5 Minuten vor 8 Uhr in der Schule sein und brauchst zu deinem Schulwege 10 Minuten; wann mußt du von

[1]) An dieser Stelle, da die Rede gewesen ist vom eigentätigen Erwerb der Zahl und Operationsbeziehungen durch das Kind und von den dabei in Betracht kommenden Hilfsmitteln, möchten wir nicht unterlassen, aufmerksam zu machen auf zwei Werke, deren Verfasser wir zu den fortgeschrittensten Rechenmethodikern der Gegenwart zählen: Gerlach, Von schönen Rechenstunden, 2. A., Leipzig, 1911 — und: Langermann, Handelndes Rechnen, 2. A., Berlin-Zehlendorf, 1912.

zu Hause fortgehen? Wilhelm geht abends 8 Uhr zu Bett und steht morgens 6 Uhr auf; wieviel Stunden schläft er? (2. Schuljahr.) — Aus einer Klasse sollten zu Ostern 38 Kinder versetzt werden, 4 sitzen bleiben; wie stark war die Klasse? Eine Frau kauft für 25 ₰ Blumenkohl und für 36 ₰ Kürbis; wieviel Pfennige erhält sie auf 1 ℳ zurück? Wie groß ist der Unterschied zwischen 24 und 41? Max wird 13 Plätze heraufgesetzt; er war der 32. in der Klasse, der wievielte ist er nun? Wieviel ist der 3. Teil von 36? Wieviel Fünfziger kann ich für das Zweimarkstück einwechseln? (3. Schuljahr.)

Bei allen diesen Aufgaben waren die Zahlvorstellungen klar, ebenso die Operationsvorstellungen; die in Betracht kommenden Kinder konnten auch zeigen, wie sie zu dem richtigen Ergebnis gekommen waren. Aber die kurze mathematische Form, in der wir genötigt sind, einen Rechenfall schriftlich festzuhalten, die war ihnen entweder unmöglich oder mindestens zweifelhaft. Und dabei waren es die besseren Schüler, die in solcher Weise vorausarbeiteten. Wir wollen damit zeigen, daß die mathematische Form der Lösung einer Rechenaufgabe (bei jenen Beispielen $100-50=50$; $30=3\cdot 10$; $28=10+10+5+2+1$; 5 in $35=7$ mal; $8\cdot 5=40$; 10 in $40=4$ mal; $48=6\cdot 8$; $11+12+13=36$; 9 in $36=4$ mal; $\frac{1}{2}$ von $20=10$; 8 Uhr weniger 15 Minuten $= {}^3/_4 8$ usw.) für die Kinder **eine besondere Schwierigkeit** bildet. Dieser Schwierigkeit wird die pädagogische Praxis sich freilich nicht allzu oft bewußt, weil sie von vornherein, man möchte sagen: vom ersten Tage an die mathematische Form gibt, einübt und verlangt.

Dann und wann macht sie freilich auch Erfahrungen, die ihr zu denken gegeben haben; etwa solche, wie die, daß viele Kinder die mathematischen Formen verwechseln, daß besonders Mädchen sich leicht irre machen lassen, daß Fortbildungsschüler auch sehr einfache mathematische Formen vergessen haben usf. Im richtigen Gefühl für die Ursache dieser Erscheinung wurde seinerzeit die Lehre von den Proportionen allgemein aus dem Volksschulrechnen gestrichen; diese erschienen als mathematische Formen, für deren Erfassung die Kinder — wenigstens bei dem damaligen Betriebe — offenbar noch nicht reif waren. Klar wurde freilich jene Ursache nicht gesehen; denn angesichts der mangelhaften Ergebnisse wurde von allen Seiten darauf hingewiesen, daß Üben und immer wieder Üben denn doch die Hauptsache im Rechenunterricht sein müsse, und nun wurde auch die mathematische Form in derselben Weise wie bisher, nämlich mechanisch, weiter geübt.

Dem gegenüber ist es schon eine wertvolle didaktische Erkenntnis, wenn wir uns dessen bewußt werden, daß ein Kind recht wohl einen Rechenfall vorstellend bewältigen kann, ohne zugleich

die mathematische Form zu beherrschen, in die wir diesen Rechenfall zu kleiden pflegen. Aus dem allen folgt für unser unterrichtliches Verhalten dreierlei: Zunächst, *daß die mathematische Form nicht von Anfang an erscheinen darf*; sodann, *daß sie langsam eingeführt werden muß*, nachdem eine gewisse Geläufigkeit in der Behandlung der benannten Fälle erzielt worden ist; endlich, daß sie auch bei den späteren eingekleideten Aufgaben nicht einfach vorausgesetzt werden oder aufgegeben werden darf, sondern *als besondere Teilaufgabe jedes Rechenfalles anzusehen und zu behandeln ist*.

Jener ersten Forderung zufolge ist es durchaus nötig, im elementaren Rechenunterricht die Kinder eine Zeit hindurch *sämtliche Aufgaben*, die sie zu lösen haben, in ausgeführter, dinglich konkreter Darlegung rechnen zu lassen, also mit vollständiger Benennung und ohne jede mathematische Form. Etwa so: Wenn ich 4 Schieferstifte habe und schenke davon dem Karl einen, dann habe ich selber bloß noch 3. Wenn ich 10 ₰ in meiner Sparbüchse habe, und meine Schwester bloß 8, dann habe ich 2 mehr. Wenn ich an dem einen Sonntag von meinem Vater einen Fünfer kriege, und an dem andern Sonntag noch einmal einen, und dann noch einmal einen, dann habe ich 15 ₰. Wenn die Mutter uns 12 Nüsse gibt zum Verteilen, dann kriegt jedes von uns 3 Kindern 4 Nüsse. — Dabei muß bemerkt werden, daß diese Beispiele den Betrieb an wirklichen Gegenständen und mindestens auch dinglichen Symbolen schon voraussetzen; es sind — wie jeder sieht — Vorstellungsexempel, nicht Wahrnehmungsexempel (vgl. S. 231 unter 2).

Sodann unsere zweite Forderung, daß die mathematische Form *langsam* eingeführt werden muß. Hier erhebt sich die Frage nach dem rechten Zeitpunkt ihres Eintretens. Sie kann selbstverständlich nicht mit Zeitangaben nach Wochen und Monaten beantwortet werden. Allgemein darf man sagen: Lieber nicht zu früh. Es ist jedenfalls Zeit genug, wenn die Kinder das Bedürfnis spüren, sich kürzer zu fassen; wenn also die Ersparnis an Zeit, die in der kürzeren Fassung zunächst zum Ausdruck kommt — abgesehen von der Abstraktion — den Kindern zum Bewußtsein kommt. Das ist in den Anfängen schon möglich, wenn die Kinder noch mit dinglichen Symbolen rechnen, mit Fingern, Zählsteinchen, Kastanien, mit den Kugeln der Rechenmaschine usw. Gerade der Gedanke der dinglichen Symbole, das heißt ihr Eintreten für die eigentlich gemeinten Dinge — Kinder, Pfennige, Blumen, die nicht zur Hand sind usw. — verlockt ja geradezu zum Weglassen der eigentlichen Bezeichnung. Und damit wird eben die mathematische Form eingeleitet. Wenn an Dingen und dinglichen Symbolen genugsam gerechnet worden ist: 10 ₰ und 3 ₰ sind zusammen 13 ₰; 9 ₰ und

2 ₰ sind zusammen 11 ₰; 12 ₰ und 4 ₰ sind zusammen 16 ₰ — selbstverständlich wechselnd auch an anderen Sachgebieten — dann werden ohne Schwierigkeit die nächsten Formen lauten können: 11 und 4 sind 15 ₰; 9 und 3 sind 12 ₰; die Benennung erscheint nur noch einmal, und entbehrliche Wörter bleiben auch sonst weg[1]). Und ein andermal wird man — mitten in der Übung — auch noch diese letzte Bezeichnung weglassen können, so daß damit die mathematische Form dieser Operation beinahe schon erreicht ist.

Eins ist hierbei noch wesentlich. Wollen wir unsere Kinder in den Geist der Sache einführen, so müssen wir sie von vornherein daran gewöhnen, daß die mathematische Form nur Mittel ist zum Zwecke der Kürze bei unverminderter Klarheit, daß sie also nicht Selbstzweck ist. Dies können wir nur dadurch erreichen, daß wir die mathematische Form nicht starr sein lassen, sondern daß wir Änderungen gestatten, ja zu solchen Änderungen selbst anregen. Daß hierzu die sehr einfachen Formen der Addition und Multiplikation wenig Gelegenheit bieten mit ihrem „und" und „mal", ist ohne weiteres klar und schadet auch nichts. Es sind noch genug andere Möglichkeiten da; z. B. in der Subtraktion: 6 Federn, eine weniger, nun sind's noch 5; 6 Federn weniger eine (die Form fällt den Kindern mit am schwersten), dann sind's noch 5; 6 Federn, eine weg, sind 5; 6 Federn, weg eine, bleiben noch 5 usw. Man sieht, daß die Möglichkeiten der Abänderung vielfach gegeben sind und sich je nach dem Verständnis der Kinder vermehren ließen (mit Ausdrücken wie vermindern, verringern, abziehen usw). Beim Teilen und Enthaltensein ist es ähnlich.

Ein vorläufiges Ziel auf dem Wege zur Entwicklung der mathematischen Form, das heißt ein solches, bei dem längere Zeit stehen geblieben werden kann, zeigen folgende Beispiele: 5 und 7 sind 12; 18 weniger 5 sind 13; 19 sind 10 und 9; 17 sind 3 mehr als 14; 6 mal 4 sind 24; 5 in 20 geht 4 mal; 30 geteilt unter 6 sind (für jedes) 5; 40 sind 5 Achten (oder 5 mal 8).

Die dritte der oben aufgestellten Forderungen, daß die mathematische Form auch späterhin als besondere Aufgabe jedes eingekleideten Rechenfalles anzusehen und zu behandeln sei, ist nicht weniger wichtig als die beiden ersten. Doch lassen sich die Darlegungen an dieser Stelle wesentlich abkürzen. Denn bei solchen Aufgaben kommt es nicht so sehr darauf an, den mathematischen Sachverhalt, also den anfänglichen Tatbestand und seine Veränderungen, aufzufassen und mit Zahlbewußtsein zu verfolgen, sondern

[1]) Besonders hervorzuheben ist die von vielen Pädagogen längst geübte Art, als Gleichheitsausdruck längere Zeit „sind" gebrauchen zu lassen, auch dann noch, wenn die Kinder schon so weit sind, alle Bezeichnungen fortlassen zu können, z. B. 80 und 20 sind 100. Erst später tritt an die Stelle des „sind" die in diesem Falle allgemeinere Einzahlform „ist".

darauf, das Vorgestellte in die kürzeste und übersichtlichste Form zu bringen zum Zwecke der schriftlichen Aufzeichnung[1]). Dadurch nun, daß dieser neue Zweck hereinspielt, wird das Verfahren beeinflußt, und die Darstellung der Behandlung dieser Aufgabe empfiehlt sich also an der entsprechenden späteren Stelle.

§ 32. Die mechanische Geläufigkeit.

Die Notwendigkeit der Einprägung rechnerischer Sätze ist noch niemals bestritten worden. Alle Werke über Rechenunterricht, alle Verordnungen der Behörden, alle Ratschläge der Erfahrenen wetteifern geradezu miteinander in der Empfehlung der „Übung".

Durch diese Einprägung und Übung soll eine völlig mechanische Geläufigkeit der elementaren Rechensätze erzielt werden, jener Rechensätze, die wir als Bedingungsurteile mit 5 Begriffen auffassen gelernt haben: drei Zahlenbegriffen, dem Operations- und dem Gleichheitsbegriffe. Rechensätze solcher Art sind $7+6=13$, $7\cdot 6=42$. Ja, es ist nicht schwer, sich das Gesamtgebiet dieser Rechensätze zu vergegenwärtigen. Ein vorläufiger Überblick ergibt folgendes: Die Addition und Subtraktion einstelliger Zahlen, das kleine Einmaleins, vielleicht noch die Multiplikation und Division mit 10 und 100. Doch braucht dies letztere auch nicht hierher gerechnet zu werden, sondern kann als Ausdruck der Systemauffassung erscheinen. Alle diese Sätze sind dem Erwachsenen mit normaler Rechenfertigkeit so geläufig, daß ihm jeder einzelne Satz wie ein Elementargebilde erscheint, mit dem er hantiert wie mit Gattungsbegriffen (Haus, Straße, Mann) oder Beziehungsbegriffen (auf, in, dem gegenüber), wo das Wort die Begriffsstellvertretung übernommen hat. Oder, um noch einen besseren Vergleich zu bringen: Diese Sätze sind zu ähnlicher Geläufigkeit in unserem Denken gelangt, wie sie etwa folgenden Urteilen eigen ist: Wasser macht naß; Wenn ich den Stift in meiner Hand loslasse, fällt er zu Boden; Wenn die Pflicht ruft, kann man nicht dem Vergnügen nachgehen — oder auch folgenden Ausdrücken des Umgangs: Wollen Sie so freundlich sein... Ich danke Ihnen vielmals... Es hat mich sehr gefreut... Ich bedaure lebhaft... usw. Genau so, wie unser äußeres und inneres Verhalten, unser Denken und Handeln diese mechanisierten Sätze kennt — die einen gewissermaßen als seine Voraussetzung, die anderen als seine Kleinmünze — und ihnen gemäß sich gestaltet, genau so ist die Raschheit, Sicherheit und Leichtigkeit aller rechnerischen Tätigkeit bedingt von der mechanischen Beherrschung der

[1]) Darauf wiesen ja auch die eingangs angeführten Erfahrungen hin, da die Kinder sich eben außer Stande sahen, dem Exempel in ihrem Buche schriftlich die geeignete Form zu geben.

einfacheren Rechenurteile. Eine Hausfrau, die im Fleischerladen oder beim Kaufmann nachrechnen will, ob sie das richtige Gewicht erhalten hat, muß über die elementaren Operationssätze mechanisch verfügen. Und wer Gleichungen auch nur 1. Grades rechnen will, dem müssen außerdem auch einfache Sätze der Algebra — z. B. der der Quadratdifferenz $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$ — im Schlafe geläufig sein, und dies ist nicht bildlich, sondern wörtlich zu nehmen. Allgemein: wenn wir unsere Aufmerksamkeit dem *sachlichen Zusammenhange* eines Rechenfalles zuwenden wollen, muß unbedingt die mechanische Geläufigkeit der Assoziationen als Bewußtheit dahinter stehen. Ohne sie ist eine mathematische Sachauffassung, die auch nur wenig über die Elementarstufe hinausgeht, nicht möglich. Und selbst das elementare Rechnen mit zweistelligen Zahlen setzt die Geläufigkeit jener einfacheren Rechensätze voraus.

Nachdem so *Zweck und Ziel* der Einprägung klargestellt ist, wenden wir uns dem *Verfahren* zu. Vorher aber ist nötig, nicht bloß in einem summarischen Überblick den Stoff des Einprägens zu kennen, sondern *genau* festzustellen, welche Zumutung an den einzelnen mit dem Bewältigen der elementaren Rechensätze gestellt wird. Das Ergebnis einer solchen Aufstellung ist recht bemerkenswert. Wenn wir folgende Voraussetzungen machen: 1. daß die Zahlenreihe als vorhanden angenommen wird; 2. daß die Zahlauffassung des Systems so weit vorgeschritten ist, daß beispielsweise 27 als 7 und 20 und 30 als 3 Zehner aufgefaßt wird; 3. daß der Gedanke der Umstellung und Umkehrung (z. B. $7+2=9$, $2+7=9$; $6\cdot3=18$, $3\cdot6=18$; außerdem $9-2=7$ und 3 in 18 ist 6 mal) als geläufig angesehen werden kann — so würde zunächst folgende Gruppe von Additionen zu lernen sein:

2 + 2 = 4	3 + 3 = 6	4 + 4 = 8	5 + 5 = 10
2 + 3 = 5	3 + 4 = 7	4 + 5 = 9	
2 + 4 = 6	3 + 5 = 8	4 + 6 = 10	
2 + 5 = 7	3 + 6 = 9		
2 + 6 = 8	3 + 7 = 10		
2 + 7 = 9			16 Additionen;
2 + 8 = 10			

dazu käme als zweite Gruppe:

9 + 2 = 11	8 + 3 = 11	7 + 4 = 11	6 + 5 = 11
9 + 3 = 12	8 + 4 = 12	7 + 5 = 12	6 + 6 = 12
9 + 4 = 13	8 + 5 = 13	7 + 6 = 13	
9 + 5 = 14	8 + 6 = 14	7 + 7 = 14	
9 + 6 = 15	8 + 7 = 15		
9 + 7 = 16	8 + 8 = 16		
9 + 8 = 17			20 Additionen;
9 + 9 = 18			

endlich käme dazu als dritte Gruppe, wobei zu beachten ist, daß die Verdopplung einer Zahl schon in den Gruppen der Addition enthalten ist:

3·3 = 9	4·4 = 16	5·5 = 25	6·6 = 36
3·4 = 12	4·5 = 20	5·6 = 30	6·7 = 42
3·5 = 15	4·6 = 24	5·7 = 35	6·8 = 48
3·6 = 18	4·7 = 28	5·8 = 40	6·9 = 54
3·7 = 21	4·8 = 32	5·9 = 45	
3·8 = 24	4·9 = 36		
3·9 = 27			
7·7 = 49	8·8 = 64	9·9 = 81	
7·8 = 56	8·9 = 72		
7·9 = 63			

28 Multiplikationen.

Subtraktion, Teilen und Messen, additives Vergleichen sowie Zerlegen in Summanden und Faktoren fügen — wie schon angedeutet — nichts Neues hinzu, sondern beziehen sich auf dieselben entsprechenden Zahlgrößen.

Diese 64 Sätze sind also der **gesamte assoziative Grundstock**, auf dem nicht nur das ganze elementare Rechnen der Schule, sondern auch das gesamte Rechnen des praktischen Lebens des Arbeiters wie des Großkaufmanns, der Magd wie des Astronomen sich aufbaut, ja den auch alles berufliche Rechnen wie alle höhere Mathematik nicht entbehren kann.

Man hat gemeint, daß diese paar Sätze doch in kurzer Zeit zu lernen seien, haben wir doch in unserer Jugend mehr denn 700 Sprüche, das Gedicht, Lieder und sonst etwas gelernt. Und man betrachtete hier wie da als einziges Mittel der Einprägung die **Übung und Wiederholung**.

Sehen wir uns zunächst einmal diese beiden Begriffe an, die vielfach gleichgesetzt, vielfach auch ohne weitere Begründung nebeneinander gestellt werden. Dem Wortsinn nach ist beides **nicht** dasselbe. Der weitere Begriff ist die Wiederholung. Er besagt lediglich, daß dasselbe psychische Erlebnis mehrfach auftritt. So bringt jeder Tag die Wiederholung des Ankleidens, des Frühstücks, die Wiederholung des Schulwegs usw. Erst eine Wiederholung, die dem besonderen Zwecke der Kraftsteigerung, der Kraftersparnis, der Leichtigkeit, Schnelligkeit und Sicherheit des Vorgangs dient, erst eine solche Wiederholung verdient den Namen **Übung**. Sie ist demnach eine Wiederholung zum Zwecke der Vervollkommnung in Erleichterung und Differenzierung des Vorgangs[1].

[1] Daneben darf freilich nicht unerwähnt bleiben, daß schultechnisch der Ausdruck Wiederholung in einem anderen, viel engeren Sinne gebraucht wird,

Das Tun der alten Schule, das hier in Betracht kommt, läßt sich also bezeichnen als Wiederholung mit dem Zwecke des Festhaltens einerseits, Übung der sofortigen Bereitschaft andrerseits. Um diese beiden Zwecke, die in den Ausdruck „mechanische Geläufigkeit" sich zusammenfassen lassen, zu erreichen, verwendete sie als wichtigstes und zum größten Teil als einziges Mittel — bewußt oder unbewußt — die Einprägung der Wortreihen. Tägliches Aufsagen des kleinen Einmaleins war es in der Hauptsache, das teils allein, teils im Wechsel mit anderen assoziativen Übungen Jahre hindurch getrieben wurde. Diese Übungen haben nicht nur eine eigene Literatur hervorgerufen, sie haben auch eine Reihe von Lehrmitteln entwickelt, die lediglich diesem Zwecke der wörtlichen Einprägung des Einmaleins usw. dienen sollen. Und als wir uns der geringen Zahl der „zu lernenden" 64 Assoziationen bewußt wurden, trat da nicht auch an jeden von uns der Gedanke heran: Das müßte doch wahrhaftig von jedem Kinde zu begreifen sein — eben im Sinne des Wortlernens? Es war das Geist vom alten Geist.

Nun hat das Wortlernen zweifellos sein Gutes gehabt und sein Recht dazu, und es wäre gänzlich verfehlt, dies zu verkennen[1]). Daß das mechanische Wortgedächtnis einen gewissen Anteil hat an dem Geläufigwerden der Rechensätze, dafür bestehen zwei einleuchtende Gründe. Zunächst der, daß bei der Abstraktheit der Begriffe, die bei den Zahlbegriffen früh schon einen ziemlich hohen Grad erreicht, dem Wort eine viel größere symbolische Bedeutung zukommt als bei Sachvorstellungen, die gegebenenfalls ohne Wortsymbol bestehen können. Diese hohe Bedeutung führt nun dazu, daß das Wort für die meisten Menschen in einem gewissen Alter zur einzigen Vertretungsvorstellung der Zahl- und Operationsbegriffe wird, selbst dann, wenn sie einen Rechenunterricht genossen hatten, der zur Konkretisierung reichlich Veranlassung bot. Die wichtigste Vertretungsvorstellung eines Begriffs ist aber selbstverständlich durchaus nötig, wenn es sich um sein Geläufigwerden handelt. Dazu kommt als zweiter Grund, daß die mathematischen Erlebnisse in der Regel eine wesentlich geringere Gefühlsbetontheit haben als viele andere psychische Erleb-

nämlich als Wiederholung einer gedächtnismäßig festzuhaltenden Vorstellungs- oder Wortreihe. In diesem Falle bekommt der Begriff Wiederholung den Sinn, sich auf den Unterrichtsstoff als Objekt zu beziehen, während die Übung im Gegensatz dazu auf Kräfte, Fähigkeiten und Fertigkeiten sich erstreckt. Zu exakten psychologischen Feststellungen ist allerdings dieser Sinn des Wortes Wiederholung nicht zu brauchen.

[1]) Auch der ideale Eifer des Reformers darf nie zu unbedingt absprechenden Urteilen führen, zumal gegenüber Erscheinungen, die sich als Mißbrauch oder übertrieben einseitige Auffassung eines an sich guten Gedankens darstellen. Ob das der Fall ist, kann nur eine sachliche Prüfung erweisen.

nisse (z. B. die Erzählung einer Geschichte, die Schilderung einer Landschaft, die Betrachtung eines Bildes usw.). Sie bedürfen deshalb in höherem Maße als andere Inhalte des wiederholten Eintritts ins Bewußtsein unter darauf gerichteter Aufmerksamkeit, um diejenige Beharrungs- und Wirkungsfähigkeit zu erreichen, die gefühlsbetonte Inhalte haben. In der Form der Berührungsassoziation erlangen sie nach und nach den Charakter und die Stärke von Bewußtheiten, die zu unserer Verfügung stehen. In solcher Weise erwerben wir die Einzelheiten eines täglich zurückgelegten halbstündigen Wegs; in derselben Weise ist aber auch eine fest eingeprägte Wortreihe imstande, eine parallele Reihe von Sach- oder Wortvorstellungen zu stützen, die an sich des anschaulichen oder des inneren Zusammenhangs entbehrt. So sucht sich z. B. mancher durch den Merkvers „In Richters Ofen . . ." die Reihe der Fastensonntage zu erleichtern. In derselben Weise — nur ohne die Absicht, gleichzeitig entsprechende Sachvorstellungen zu erwerben — eignen wir uns die weiter oben als Beispiele angeführten Redensarten an, sie und viele andere, die nett klingen sollen, aber völlig unverbindlich sind, zumal in den Superlativen. In derselben Weise fallen beim Kinde Sprache und Sache auseinander. Ein kleines Kind, das die Redensarten der Erwachsenen braucht, finden wir altklug, oder wir staunen über seine Frühreife; das hätten wir nicht nötig, denn meist ist mit jenen Worten nur ein Schimmer von Verständnis verbunden. Es ist ähnlich, wie wenn ein 10jähriges Kind zuhört, wie sein größerer Bruder sich ein lateinisches oder französisches Gedicht in vielfacher Wiederholung einprägt. Es lernt dabei die Wortfolge, und diese Kenntnis kann ihm eine Erleichterung sein, wenn es später sich vor dieselbe Aufgabe gestellt sieht. Auch bei den anderen Beispielen läßt sich ein gewisser Zukunftswert nicht leugnen.

Diese Bedeutung der Wortgeläufigkeit der Assoziationen, auch der mathematischen, ist von jeher bekannt. Sie ist es, die die Methodikbücher im Auge haben, wenn sie von der „Übung", der „unablässigen Wiederholung", so Großes erwarten; sie ist es, die die Praxis unseres Rechenunterrichts mit den entsprechenden „Übungen" zum größten Teil ausgefüllt hat.

Dem gegenüber dürfen wir nun aber nicht die Augen verschließen vor den Nachteilen einer bloßen Wortgeläufigkeit. Auf dreierlei muß hierbei hingewiesen werden. Das mechanische Wortgedächtnis ist zunächst völlig urteilslos. Das Kind, welches in solcher Weise sein Einmaleins „lernt", übt mit derselben Ruhe ein: 7·8=54 und 6·9=56; es lernt ebenso leicht Richtiges wie Falsches. Das ist beim Sprachlernen etwas ganz anderes, wo die einzelnen Wörter durch den Sinn zusammenhängen und durch die Sachvorstellungen als notwendige Teile eines plasti-

schen Bildes erscheinen. Nun haben wir schon an anderer Stelle gezeigt (S. 147), wie schwer es ist, eine falsche Assoziation, die sich schon bis zu einem gewissen Grade befestigt hat, wieder zu entwurzeln. Jahre hindurch kann die alte falsche Form noch neben der neuen richtigen auftauchen. — Es sei weiter der Fall gesetzt, daß das mechanische Einprägen der Worte ohne Fehler vor sich gegangen sei und eine gewisse Festigkeit erreicht habe. Dann ist trotzdem die mathematische Assoziation noch sehr unzuverlässig. Das mag nicht in gleichem Maße von allen Wortassoziationen gelten, z. B. nicht von Liedern, Sprüchen und Gedichten. Hier ist aber eben der Sinn dabei, der uns die „Sinn"-Sprüche unserer Dichter auch in ihrer Form getreu bewahren läßt. Oder es ist die Gefühlsbetontheit oder gar äußere Momente, wie Reim und Rhythmus, wie bei vielen Liedern, die auch das Behalten des Wortlauts unterstützen. Vom Sinn der mathematischen Sprüche mußten wir nach unserer Voraussetzung absehen. Und die übrigen Stützmomente finden sich nach unserer Erinnerung an die eigene Kindheit und nach den Beobachtungen der Praxis nur bei ganz wenig Sätzen[1]). Die Unzuverlässigkeit der mathematischen Wortassoziationen zeigt sich darin, daß sich das Kind leicht irre machen läßt, z. B. wenn ihm von seiten eines anderen Kindes eine falsche entgegentritt, die aber mit voller Bestimmtheit vorgetragen wird. Sie hängt zusammen — wie man sofort sieht — mit jener schon erwähnten Urteilslosigkeit. Sie hat andrerseits ihren Grund in der weiter oben angeführten Feststellung von Ranschburg (S. 146), daß „sich berührende Inhalte und Vorgänge der Seele sich in ihrer selbständigen Entwicklung um so mehr stören, je homogener sie sind"; anders ausgedrückt: daß ähnliche Sätze zur Verschmelzung neigen — womit erklärt ist, daß auch fest eingeprägte Wortreihen „vergessen" oder besser vermengt werden, wenn ein Zeitraum geringerer Übung sich dazwischen schiebt, wie es die Fortbildungsschule allgemein zeigt.

Ein dritter Nachteil der bloßen Wortgeläufigkeit ist endlich die Tatsache, daß sie durchaus unfruchtbar ist. Ein Kind kann deutsche oder fremdsprachliche Sätze auswendig lernen, ohne eine Ahnung von ihrem Inhalte zu haben. Ebenso kann man Schwachsinnigen das ganze kleine und große Einmaleins so einprägen, daß sie es mit unfehlbarer Sicherheit „können". Aber für ihr mathe-

[1]) Eigentlich nur bei zweien. Gleichklang, Endreim und Rhythmus bei diesem: „6 · 6 = 36 und (diese Bindung „und" ist hier sinnlos, wird aber von den Kindern allgemein als nötig empfunden) die Frau ist noch so fleißig, und der Mann ist liederlich, geht die Wirtschaft hinter sich". Und dann bei dem anderen: „8 · 7 = 56", wobei das Sprechen die rückwärtsschreitende Zahlenreihe beachten soll: Acht mal sieben ist sechsundfünfzig. Auch hier ist es ein außerhalb liegendes Moment, das das Behalten unterstützt.

matisches Vorstellen, für ihr Rechnen ist diese Art von Assoziation wertlos. Denn nicht die Worte sind es, die das Anwenden in sich schließen, sondern die hinter den Worten stehenden Vorstellungen und Begriffe.

Ganz gewiß — so hören wir den Vertreter der alten Schule sagen — soll das Wortlernen nicht überschätzt werden; aber ebenso wichtig ist es, seine Nachteile nicht zu überschätzen. Und er weist darauf hin, daß das „urteilslos" in der Praxis doch keine Berechtigung habe, da man sich allenthalben bemühe, „von der Anschauung auszugehen" und das Verständnis erst zu erzeugen; daß ferner dem „unzuverlässig" durch ununterbrochene Übung vorgebeugt werden könne; daß endlich das „unfruchtbar" doch nur für eine gewisse Zeit gälte — es habe sich so vieles, was zunächt nicht verwertbar schien, später als recht fruchtbar erwiesen. Und daß der Besitz des Gefäßes den Erwerb des Inhalts erleichtere, sei ja schon von uns selbst zugegeben.

Dem wäre folgendes zu erwidern. Mit dem ersten seiner Hinweise gibt der Vertreter der alten Schule unsere Behauptung vom Nachteil der **bloßen** Wortgeläufigkeit ohne weiteres zu. Dazu beruhen seine Behauptungen über die Praxis auf dem Irrtume, daß mehrmaliges **Vorstellen** — vielen genügt anscheinend einmaliges — eines konkreten Rechenfalles „Anschauung" sei[1]; und daraus geht wieder der andere Irrtum hervor, daß solche Anschauung das „Verständnis" erzeuge. Um ferner die bloße Wortgeläufigkeit zuverlässig zu gestalten, bedarf es eines solchen Aufwandes an Zeit, daß darunter andere wichtige Aufgaben, wie z. B. die Anwendung, zu kurz kämen, insbesondere, wenn es gilt, jahrelange Übungspausen zu vermeiden. Endlich: das „fruchtbar für später" ist ein beliebter Grund aller Reformfeinde. Sie huldigen bewußt oder unbewußt dem Grundsatze, daß das, was ihnen selbst zurzeit teuer und wertvoll ist, Lerngut für die Jugend sein müsse, damit dessen Erhaltung gesichert bleibe. Kenntnis der Geschichte und der Psychologie würde sie eines besseren belehren können. Und selbst wenn das „fruchtbar für später" richtig wäre, würde sich die Frage nach dem entsprechenden Energieaufwand erheben. Hier glauben sie ja, ihre starke Stütze zu haben an der „Tatsache", daß das Gedächtnis des Kindes weitaus stärker sei als das des Erwachsenen, daß es bis zum 14. Jahre zunähme und von da bereits wieder zurückgehe. Dies hat aber die psychologische Forschung längst als Irrtum erwiesen[2]. Das bloße Wortlernen ist also ein Energieverlust.

[1] Man vergleiche nochmals diese sogenannte „Anschauung" mit der wirklichen und allein wirksamen, wie wir sie S. 137—141 gekennzeichnet haben.

[2] „Nach einer weit verbreiteten Meinung soll bei dem gereiften Menschen das ‚logische', beim Kinde das ‚mechanische' Gedächtnis das stärkere sein. In der Tat dürfte dieser Unterschied insoweit zutreffen, als jener in der Regel für

Und selbst der Hinweis auf das Bild des Gefäßes ist nicht angebracht; denn dies Bild ist nur in einem gewissen Sinne richtig, in dem nämlich, daß, wo das Bedürfnis nach der Sache vorhanden ist, selbstverständlich auch für ein Gefäß für die Sache gesorgt wird. Umgekehrt aber für ein Gefäß zu sorgen, damit die Möglichkeit gegeben sei, es später zu füllen, wird jedermann — mit Ausnahme dieser Wortbeflissenen — für unzweckmäßig halten. Man denke an drastische Beispiele, wie, daß man einem Kinde eine umfangreiche Brieftasche schenken wollte für künftige Banknoten oder einen Stoß passender Glaskästen für eine künftige Schmetterlingssammlung, oder einen wertvollen Malkasten, damit es ein großer Künstler werde, oder wenn sich jemand 1000 Bogen Papier kaufen wollte, weil er vielleicht später einmal Lust bekommen könnte, ein Buch zu schreiben. —

Es ist also ein großer Irrtum, der bloßen Worteinprägung einen mehr als minimalen Wert beizumessen. Daß dieser Irrtum noch weite Kreise erfüllt, zeigt sich in der allgemeinen Empfehlung der „Übung", welche den mangelhaften Erfolgen unsres Rechenunterrichts abhelfen soll, einer Übung, welche nach den Gepflogenheiten und Möglichkeiten der heutigen Praxis in der Hauptsache eben nur als Wortlernen erscheint.

Die Berechtigung des Wortlernens einerseits, seine Nachteile andrerseits lassen die Frage nach der rechten Würdigung oder besser nach der rechten Stelle seines Erscheinens auftauchen. Sie ist bald beantwortet. Die Worteinprägung wird nämlich nicht ein Kreuz, eine Last, sondern eine Hilfe sein, wenn sie eintritt, nachdem das mathematische Bewußtsein der Kinder so weit in die Zahlbeziehung eingedrungen ist, daß ihnen eine gefühlsmäßige Schätzung zur Verfügung steht. Diese gefühlsmäßige Schätzung sagt dem Kinde, daß das Ergebnis der Rechnung 9 und 8 im 2. Zehner liegen wird; daß das Ergebnis der Rechnung 9 mal 8 aber eine ziemlich große Zahl ergibt, die fast die 80 erreicht; oder daß 8·7 bedeutend mehr ist als 6·6, daß dagegen 5·8 und 7·6 nicht weit auseinanderstehen werden, ebenso wie 3·4 und 5:2 oder 6:5 und 4·7 usw. Wenn dies gefühls-

einen beliebigen mechanischen Memorierstoff kein Interesse besitzt und daher überhaupt keine Mühe darauf verwendet, ihn sich anzueignen, während das Kind hierzu gezwungen wird. An sich ist aber, wie genauere statistische Versuche unter Einhaltung gleicher sonstiger Bedingungen zeigen, diese Annahme falsch. Vielmehr ist das Gedächtnis erwachsener Menschen überhaupt leistungsfähiger als das des Kindes, und dieser Vorzug bezieht sich sowohl auf sinnloses Material wie auf logisch zusammenhängende Verbindungen". Wundt, Grundzüge III. 5. A. S. 594.

Vergl. dazu auch den Ausspruch von A. Forel in dem späteren Abschnitte „Die reine und die benannte Zahl".

mäßige Taxieren auf Grund wiederholter, allseitiger, insbesondere auch handgreiflicher Anschauung und entsprechender eigentätiger Darstellung erreicht ist, dann mag man getrost das Auswendiglernen mit heranziehen. Der Satz $8 \cdot 7 = 56$ ist, wenn er nun erst gelernt wird, vielfach von dem Unterbewußtsein begleitet: Daß du es nicht verwechselst mit $9 \cdot 6$! $9 \cdot 6$ ist 6 weniger als 60. Die Worteinprägung ist nun keine Last mehr, sondern eine Hilfe, die aber nicht allzu starker Belastung ausgesetzt wird, weil sie allenthalben ihre anschauliche und begriffliche Sicherung findet. Daraus geht hervor, daß sie eigentlich erst zu einer Zeit statthaft ist, wo sie sich als sprachlicher Ausdruck der betreffenden anschaulichen Erfahrung in den meisten Fällen schon von selbst assoziativ zu sichern beginnt. Sie gehört somit nicht auf die Unterstufe, hat dagegen auf der Mittel- und Oberstufe ihre Berechtigung. Der jetzige Unterricht aber hat sich nicht nur einer Überschätzung, sondern auch einer Verfrühung der Worteinprägung schuldig gemacht.

§ 33. Die Einübung der Rechensätze.

Die Geläufigkeit der Assoziation ist bedingt und wird darum mit wirklichem Erfolge angestrebt durch ihre Einübung auf anschaulicher Grundlage. Was darunter zu verstehen ist, haben wir schon in früheren Abschnitten ausgeführt: Auffassung und Darstellung der Operationsfälle und ihrer im Dezimalsystem ausgedrückten Ergebnisse an wirklichen Dingen, dinglichen Symbolen und Zahlsymbolen; und zwar von seiten jedes einzelnen Kindes und selbstverständlich mit sprachlicher Darstellung und mathematischer Formulierung des Vorganges. Dabei ist zu betonen, daß die sich selbst aufdrängende Worteinprägung nicht nur nicht gefördert, sondern manchmal geradezu gehindert werden möchte zugunsten der Sachvorstellung. Nicht an Wörter, auch nicht an Ziffern sollen die Kinder denken, wenn sie beispielsweise 80 zu 100 zu ergänzen haben, sondern sie sollen Dinge oder Symbole oder symbolische Raumvorstellungen vor sich sehen, wenn auch noch so schwach, und auf Grund dieser Vorstellung urteilen, daß in jenem Falle noch 20 Einheiten notwendig sind. Ein solches Verhindern gedankenloser, d. h. vorstellungsloser Einprägung kann aus der Praxis heraus warm empfohlen werden[1]). Später, wenn man mehr

[1]) Bei der Übung von Zehnerübergängen wie $80 + 50$ hatte ich etwa gesagt: Wir wollen uns jetzt eine Weile lang immer Zehnpfenniger, Groschen vorstellen. Versucht es! 8 Groschen! Jetzt 6 Groschen? Geht es? Nun wurde kurze Zeit geübt, bald ohne Hinzufügung der Benennung, „wir wissen ja, was gemeint ist“. Da kam ein Kind dran, von dem ich wußte, daß es dem wörtlichen Auswendiglernen zuneigt. Als es sein Ergebnis sagte, setzte ich anscheinend ganz gleichgültig

und mehr zum Verlassen der Benennung übergegangen ist, soll doch jedes Kind jederzeit in der Lage sein, den gegebenen Rechenfall zu konkretisieren [1]).

Durch dies oft wiederholte anschauliche, greifbare und vorstellbare Auffassen und Darstellen der Rechenfälle erreichen wir nach und nach, was wir weiter vorn bezeichnet haben als adäquate Assimilation; eine Assimilation ähnlich der, daß man einen Bekannten schon auf weite Entfernung mit unfehlbarer Sicherheit an seinem Gange erkennt; ein Erkennen also, das nicht mehr unklar allgemein urteilt, nicht mehr vermutet, nicht mehr irrend daneben greift, sondern das handelnd mit Sicherheit das Richtige trifft. Dadurch gelingt es, das Unterbewußtsein der Beziehungsergebnisse, das sich allmählich gebildet hat, so weit zu befestigen, daß es gefühlsmäßig schon wirkt bei der Auffassung des zu lösenden Problems. Die darauf folgende mechanisierende Reproduktion hat dann keine andere Aufgabe, als dies Unterbewußtsein in eine Bewußtheit zu verwandeln.

Außer der einen Forderung, alle rechentechnischen Übungen auf anschauliche Grundlage zu stellen, müssen wir, wenn die unbedingte Geläufigkeit der Rechensätze unser Ziel sein soll, noch die andere erheben: alle rechentechnischen Übungen so zu gestalten, daß das Kind durch sie zu immer größerer Klarheit über die Zahlvorstellungen wie über die Zahlbeziehungen gelangt, daß es seine Zahlbegriffe zu immer vollendeterer Durchsichtigkeit und Veredlung bringt. Ein ausgezeichnetes Mittel dazu ist es, wenn wir die Kinder auf Arbeitsmethoden — nicht auf Normalverfahren — einschulen, die mathematisch besonders praktisch sind. Solche Arbeitsmethoden gelangen zur Ausbildung, wenn wir uns bemühen, die Zahlbeziehungen fleißig untereinander in Verbindung zu setzen.

hinzu: Zentimeter. Und das Kind wiederholte: Zentimeter. Das war natürlich für sämtliche anderen ein Gaudium, und ich fügte hinzu: Nicht aufs Eis führen lassen! Du wirst gewiß das nächste Mal vorsichtiger sein.

[1]) Ängstlichen Gemütern, die da glauben, die Kinder kämen nicht „von der Anschauung los", sowie solchen, die der Überzeugung sind, daß in einem gewissen Alter das Rechnen „rein begrifflich" vor sich gehen müsse, kann zum Troste gesagt werden, daß die von ihnen gewünschte Entwicklung mit Sicherheit eintritt, ja nach unserer Erfahrung in den meisten Fällen noch zu früh, und dies trotz unserer Nötigung zu räumlichem Vorstellen. Was wir hiermit verlangen, ist doch nur dasselbe, als wenn wir im Deutschunterrichte unsere Kinder anhalten, von „Erholung" — und wie alle die ung-Wörter heißen — nicht schlechthin zu reden oder zu schreiben, sondern sich dabei vorzustellen, wie sie sich auf den Wiesenrand gesetzt haben, oder wie ein krankes Mütterchen ausgefahren wird, oder wie Verwundete spazieren gehen. Es ist dasselbe, was die Kunsterziehungsbewegung wollte, dasselbe, was deutsche Kultur von welscher unterscheidet: daß nämlich Kopf und Herz gebildet werden und nicht in erster Linie das Mundwerk.

Für die **Addition und Subtraktion** kommt hierbei am meisten in Betracht die Nachbarschaft zu bedeutungsvollen Systemwerten, das **Prinzip der runden Zahl**. Es sollte unsere gesamten Additions- und Subtraktionsübungen durchdringen[1]). Ihm gemäß lernen die Kinder in eigentätiger Erfahrung, wie vorteilhaft es immer ist, beim Zusammenzählen **erst den Zehner, den Hunderter voll zu machen**. Darnach wäre zu rechnen

73 + 29 so: 73 + 7 = 80, + 22 = 102;
45 + 36 so: 45 + 5 = 50, + 31 = 81;
88 + 24 = 100 + 12 = 112;
272 + 159 = (272 + 28 =) 300 + 131 = 431.

Es ist dies ja auch psychologisch leicht erklärlich. Bei dem ersten Beispiel sind 4 Systemgrößen zu merken, 7 + 2 Zehner, 3 + 9 Einer. Während nun zwei addiert werden in der üblichen Form, müssen die beiden andern gewissermaßen ruhend im Gedächtnis behalten werden. Wird aber gleich der Zehner aufgefüllt, so gibt es keine ruhenden Zahlen, sondern alle sind in Bearbeitung, aber im nächsten Augenblicke fällt außerdem eine hinweg: 8 + 2 Zehner neben 2 Einern sind nur noch zu merken. Außerdem fällt alles Verwandeln fort. Viel deutlicher noch tritt diese Ersparnis bei dem letzten Beispiel zutage. Nach der üblichen Art sind folgende Rechnungen auszuführen:

2 Hunderter + 1 Hunderter = 3 Hunderter (dabei 4 ruhende Zahlgrößen: 7 und 5 Z., 2 und 9 E. merken),
7 Zehner + 5 Zehner = 12 Zehner (dabei noch 3 ruhende Zahlgrößen: 3 H., 2 und 9 E. merken),
12 Zehner = 1 Hunderter + 2 Zehner (dasselbe dabei merken),
3 Hunderter + 1 Hunderter = 4 Hunderter (dabei 2 Zehner und die Einer, also drei Zahlgrößen merken),
2 Einer + 9 Einer = 11 Einer (dabei 4 Hunderter und 2 Zehner merken),
11 Einer = 1 Zehner + 1 Einer (dasselbe merken),
2 Zehner + 1 Zehner = 3 Zehner (4 Hunderter und 1 Einer merken),
zusammen 400 + 30 + 1.

Wenn man den Hunderter auffüllt, gestaltet sich die Rechnung so:

272 + 28 = 300 (dabei 159, das sind drei Zahlgrößen zu merken),
159 − 28 = 131 (dabei 3 Hunderter, eine Zahlgröße zu merken),
300 + 131 = 431 (dabei war nichts zu merken).

[1]) Wir haben es schon an früherer Stelle angedeutet (S. 211 ff.), wenn auch unter anderem Gesichtspunkte.

Bei der **Subtraktion** empfiehlt es sich, dahin zu streben, daß die **dem Ergebnis benachbarte** runde Zahl möglichst bald erreicht wird:

$$81 - 29 = 60 - 8 \text{ oder auch } 50 + 2 = 52,$$
$$194 - 78 = 194 - 74 = 120, \; - 4 = 116,$$
$$237 - 41 = 200 - 4 = 196.$$

Selbstverständlich erscheinen diese Beispiele zunächst in der Form $81 - 1 - 20 - 8$, $194 - 4 - 70 - 4$ usw. Aber das Streben geht doch dahin, möglichst viel wegzunehmen, um zur runden Zahl zu gelangen. Außerdem ist in jedem einzelnen Falle zu prüfen, welches die zweckmäßigste runde Zahl ist. Bei $245 - 88$ kann gerechnet werden: $245 - 45 - 43 = 157$; nach einiger Übung aber werden die Kinder auch rechnen: $245 - 85 = 160, - 3 = 157$.

Die Berücksichtigung der runden Zahl gilt selbstverständlich auch für den zweiten Summanden wie für den Subtrahenden:

$$322 + 97 = 422 - 3 = 419,$$
$$322 - 97 = 222 + 3 = 225.$$

Auch wo Ausnahmen vorkommen ($212 + 66$, $678 - 234$, $480 - 152$), wo es sich also **nicht** empfiehlt, zur runden Zahl hinzueilen, müssen es die Kinder sofort erkennen und begründen.

Werden diese Beziehungen zur runden Zahl von Anfang an betont, so gestalten sie sich zu einer beträchtlichen Erleichterung des Zahlenmerkens sowie der Lösung längerer Aufgaben und solcher mit größeren Zahlen. Die folgende Aufgabe läßt sich in der zweiten Form bequem im Kopfe ausrechnen:

$$537 + 859 + 696 = 2092, \text{ nämlich:}$$
$$540 - 3 + 860 - 1 + 700 - 4 = 2100 - 8 = 2092.$$

$$\text{Oder } 3975 - 889 - 626 - 964 = 1496$$
$$\text{nämlich } 3975 - (875 + 14) - 626 - (1000 - 36)$$

$$= 3100 - 14 = 2500 - 40 = 1500 - 4 = 1496$$

Dieser Gedanke gilt auch für die übrigen Beziehungsverbindungen. Um nicht unnötig wiederholen zu müssen, sei gleich hier darauf verwiesen. —

Auch für die **Multiplikation** kommt zunächst die **Nachbarschaft** zu bedeutungsvollen Werten in Betracht. Während aber bei der Addition und Subtraktion diese hervorragende Bedeutung nur den Werten höherer Systemeinheiten zukommt, so ist im Gebiete der Multiplikation in diesem Sinne ein bedeutungsvoller Wert, was sich auf irgendeine Weise befestigt hat. Dahin gehören selbstverständ-

lich' auch **jene** Systemwerte, aber nicht ausschließlich. Wenn wir z. B. von allen Potenzen der 2 (abgesehen von den ersten) auswendig wissen $2^{10}=1024$, so können wir ohne weiteres 2^9 als 512 bestimmen. Oder wenn wir wissen $25^2=625$, so führen wir keine Multiplikation aus, um zu $24 \cdot 25=600$ zu gelangen.

Im elementaren Rechnen wird nun dies Prinzip der Nachbarschaft[1]) vor allem verwirklicht durch die Neunermultiplikation; z. B.

9· 7 =	fast	70,	nur	7	weniger,	nämlich	63,
9· 4 =	„	40,	„	4	„	„	36,
9·13 =	„	130,	„	13	„	„	117,
9·36 =	„	360,	„	36	„	„	324,
9·47 =	„	470,	„	47	„	„	423,
9·88 =	„	880,	„	88	„	„	792.

Sämtliche Multiplikationen mit 9 können in dieser Weise erledigt werden, selbst größere; 9·1847 liest man fast ab als 16623, allenfalls mit der Zwischenstufe 184 Hundert 70 weniger 14 Hundert 40 ist 170 Hundert 30. Davon sind noch 4 Hundert 7 abzuziehen.

Andere Multiplikationen werden weniger häufig nach dem Prinzip der Nachbarschaft gelöst. Doch sind eine Anzahl Fälle unter gewissen Voraussetzungen dafür geeignet, andere sind wegen des mathematischen Einblicks, den sie gewähren, interessant. So wird auf der untersten Einmaleinsstufe 5·4 meist leichter und früher behalten, und davon kann eine Zeitlang 4·4 und 6·4 abgeleitet werden. Und später rechnet man mit Vorteil 6·24 auch als 5·24 = 120, + 24 = 144 usw. Mit rechnerischem Gewinn wird auch die Siebener- und Achtermultiplikation zeitweilig so versucht: 7·4 = 20 + 8, 7·8 = 40 + 16, 7·6 = 30 + 12, 7·12 = 60 + 24, 7·16 = 80 + 32, 7·28 = 140 + 56 usw.

8·8 = 80 — 16, 8·4 = 40 — 8, 8·7 = 70 — 14, 8·27 = 270 — 54 usw. Ebenso kann natürlich auch gerechnet werden 18·18 als 20·18 — 36 = 324, 18·14 als 20·14 — 28 = 252, 18·23 als 20·23 — 46 = 414 usf.

Das Prinzip der Nachbarschaft zu bedeutungsvollen Systemwerten empfiehlt sich auch beim Blick auf den Multiplikanden. Hier kommt zunächst wieder das Neunereinmaleins in Frage[2]), aber auch das Einmaleins der 19 wird von den Kindern sofort bewältigt:

[1]) Auch die auf die Multiplikation bezüglichen Verfahren haben wir schon früher angedeutet, wenn auch in anderem Zusammenhange, z. B. S. 226ff.

[2]) Vergl. S. 223.

8 · 19 = fast 160, nur 8 weniger = 152
4 · 19 = „ 80, „ 4 „ = 76
7 · 19 = „ 140, „ 7 „ = 133
9 · 19 = „ 180, „ 9 „ = 171 usf.

Aus eigenem Antrieb fügten die Kinder hinzu, nun könnten sie auch das Einmaleins mit der 29:

8 · 29 = fast 240, nur 8 weniger = 232
3 · 29 = „ 90, „ 3 „ = 87 und weiter:
7 · 49 = „ 350, „ 7 „ = 343
5 · 59 = „ 300, „ 5 „ = 295
9 · 79 = „ 720, „ 9 „ = 711
4 · 69 = „ 280, „ 4 „ = 276 usf.

Auch größere Zahlen und andere als Neunernähen wurden leicht bewältigt:

6 · 249 = 1500 — 6, 7 · 58 = 420 — 14, 8 · 38 = 320 — 16, 4 · 398 = 1600 — 8, 5 · 295 = 1500 — 25, 7 · 497 = 3500 — 21 usw.[1])

Hierher gehören auch — da 37 der 3. Teil von 111 ist — folgende Beispiele: 6 · 37 = 222, 18 · 37 = 666, 24 · 38 = 888 + 24, 27 · 36 = 999 — 27 usw. —

Bedeutungsvoller fast noch als das Prinzip der Nachbarschaft ist für die Multiplikation das Prinzip der Verdopplung. Einige Beispiele: 4 · 5 = 20, 8 · 5 doppelt soviel, 8 · 7 = 56, 8 · 14 doppelt soviel; ebenso 8 · 9 und 8 · 18, 9 · 6 und 9 · 12, 7 · 7 und 7 · 14, 5 · 8 und 5 · 16 usw. Es wird selbstverständlich an beiden Faktoren geübt, an Multiplikator und Multiplikand: 4 · 3 = 12, 8 · 3 doppelt soviel; 4 · 3 = 12, 4 · 6 doppelt soviel, 8 · 6 wieder doppelt soviel, 8 · 12 wieder. Das große Einmaleins der 12, 14, 16, 18 lassen sich in gleicher Weise in kürzester Zeit gewinnen;[2]) z. B. 3 · 16 = 3 · 8 verdoppelt, 4 · 16 = 4 · 8 verdoppelt, 5 · 16 = 5 · 8 · 2, 6 · 16 = 6 · 8 · 2, 7 · 16 = 56 · 2, 8 · 16 = 64 · 2, 9 · 16 = 72 · 2. Auch die Reihen der 13 und 17 lassen sich zum Teil so gewinnen: 2 · 13 = 26, 4 · 13 = 26 · 2, 8 · 13 = 52 · 2,

[1]) Die über die höhere Systemzahl hinausgehenden Werte brauchen weniger berücksichtigt zu werden; ihre Berechnung ist in den meisten Fällen mehr selbstverständlich als elegant; so liest jeder ab: 12 · 403 = 4836, gesprochen 48 Hundert 36. Einige Ausnahmen bilden Aufgaben wie 8 · 27 = 8 · (25 + 2) = 200 + 16, 12 · 78 = 12 · (75 + 3) = 900 + 36 und ähnliche.

[2]) Ich habe früher auch gedacht, da zu rechnerischer Beherrschung etwas mehr notwendig ist als das kleine Einmaleins, man müsse auch das große „lernen" lassen. Das war ein Irrtum. Viel besser als „Können" des großen Einmaleins ist blitzschnelles Ausrechnenkönnen seiner Aufgaben. Selbstverständlich wird im Laufe der Zeit der und jener Satz im Gedächtnis hängen bleiben. Es geht mir selbst so, nur wenige Sätze stehen mir als Bewußtheit zur Verfügung, wie z. B. 7 · 13 = 91; die meisten anderen rechne ich aus, allerdings ziemlich rasch. Und mit dem Prinzip der Verdopplung ist ein wertvoller Weg zu diesem Ziele des geschwinden und sicheren Könnens gegeben.

da $3 \cdot 13 = 40 - 1$, so $6 \cdot 13 = 80 - 2$; $2 \cdot 17 = 34$, $4 \cdot 17 = 34 \cdot 2$; $6 \cdot 17 = 51 \cdot 2$.[1])

Besonders wertvoll ist es, wenn durch Übung fortgesetzter Verdopplung sich Reihen bilden wie 2, 4, 8, 16, 32, 64 bis 1024; 3, 6, 12, 24, 48 bis 576; die Fünferreihe mündet sofort in die Potenzreihe der 2 ein, ebenso die 25; zweckmäßig ist dann noch 7, 14, 28, 56, 112; 9, 18, 36, 72, 144, 288; 27, 54, 108, 216; die übrigen sind entweder schon vorhanden oder entbehrlich.

Mittels solch fortgesetzter Verdopplung kann nun gerechnet werden z. B. $16 \cdot 18$ als $8 \cdot 9 = 72$, 144, 288. $14 \cdot 26$ als $7 \cdot 13 = 91$, 182, 364. $12 \cdot 28$ als $6 \cdot 14 = 84$, 168, 336.[2]) $18 \cdot 24$ als $9 \cdot 12 = 108$, 216, 432 usw.

Bildend sind dann weiter die Fälle, wo die Verdopplung wieder aufgehoben wird durch entsprechende Halbierung:

$5 \cdot 6$ ist die Hälfte von $10 \cdot 6$, $15 \cdot 7$ die Hälfte von $30 \cdot 7$, $25 \cdot 9$ die Hälfte von $50 \cdot 9$; $35 \cdot 13$ die Hälfte von $70 \cdot 13$; $45 \cdot 17$ die Hälfte von $90 \cdot 17 = 1530 : 2 = 765$.

Noch interessanter sind endlich diejenigen, bei denen die Verdopplung wohl ins Auge gefaßt, aber schon *vor* dem Multiplizieren ausgeglichen wird:

	$5 \cdot 18 =$	die Hälfte von	$10 \cdot 18$,	nämlich $10 \cdot 9$
	$15 \cdot 14 =$	„ „ „	$30 \cdot 14$	„ $30 \cdot 7$
	$35 \cdot 18 =$	„ „ „	$70 \cdot 18$	„ $70 \cdot 9$
	$50 \cdot 46 =$	„ „ „	$100 \cdot 46$	„ 2300
oder	$12\frac{1}{2} \cdot 24 =$	„ „ „	$25 \cdot 24$	„ $25 \cdot 12$
	$37\frac{1}{2} \cdot 88 =$	„ „ „	$75 \cdot 88$	„ $75 \cdot 44 = 3300$
endlich	$18 \cdot 225 =$		$9 \cdot 450$	„ 4050 usw.

Enthaltensein und Teilen sind von jeher ausgeführt worden nach dem Prinzip der Nachbarschaft zu wichtigen Systemzahlen. Wenn 764 : 3 gerechnet werden soll, so kommt eben die in der Dreierreihe vorkommende 6, aber in der Systemzahl 600 in Betracht; sodann statt der übrigen 164 nur 15 Zehner usw. Ebenso ist es bei größeren Divisoren; bei 8573 : 326 werden zunächst nur die Systemzahlen 8000 und 300 ins Auge gefaßt, und taxierend wird festgestellt, ob die wirklich zu verwendenden Zahlen von dem Ergebnis jener runden Zahlen etwa abweichen. Hervorzuheben wäre hierbei höchstens dies noch, daß auch aufwärts vom Divisor

[1]) Zu „lernen" wären bei diesen Reihen allenfalls die Sätze $7 \cdot 13 = 91$, $3 \cdot 17 = 51$, $7 \cdot 17 = 119$. Für sie empfiehlt sich der gewöhnliche Weg der Ausrechnung, so lange sie noch nicht sich assoziativ befestigt haben.

[2]) Die Übung in der Verdopplung läßt auch Möglichkeiten sehen, die dem ungeübten Rechner entgehen. So verdoppelt man 168 als $150 + 18 = 300 + 36$.

die runde Zahl verwendet wird. Bei 730:49 kann also gerechnet werden: 730:50 = 14; 730:49 = demnach 14 Rest 44. Doch das ist dem Praktiker im allgemeinen bekannt.

Für Enthaltensein und Teilen kommt außerdem noch das Prinzip der Zerlegung in Betracht, von dem die Verdopplung bei der Multiplikation ja eigentlich nur ein Sonderfall ist. Es würde hier in der Form der Halbierung, Drittelung usw. auftreten, wie z. B.

826:48 = 413:24 1236:45 = 412:15
684:44 = 171:11 1545:85 = 309:17

Dabei ist vorausgesetzt, daß entweder die Aufgaben aufgehen, oder daß mit Brüchen gerechnet werden kann; mit Resten wird die Lösung zu umständlich. Da wir nun unsere Divisionsaufgaben selten aufgehend formulieren — die Mitarbeit der Kinder beim Aufgabenstellen verhindert das schon — da andrerseits auch die Bruchrechnung hier noch nicht vorauszusetzen ist, so ist eine solche Zerlegung auf dieser Stufe noch nicht verwendbar. Sie ist hier der Vollständigkeit wegen mit kurz berührt worden, auch als eine Anregung für höhere Stufen.

Blicken wir zurück! Es war der leitende Gedanke des ganzen Abschnitts, die Leistungsfähigkeit des Kindes im Festhalten sowie im schnellen und sicheren Verwenden der elementaren Rechensätze zu erhöhen. Auf zwei starke Hilfen konnten wir hinweisen, die nach unserer Erfahrung bisher nicht ausgiebig genug herangezogen wurden: die Orientierung jeder Rechnung an runden Zahlen durch das Prinzip der Nachbarschaft, und die mögliche Vermeidung von nebenher zu schleppendem Gedächtnisballast (das Merken der Ergebnisse schon ausgeführter Teilrechnungen) durch das Prinzip der Zerlegung, insbesondere in seiner wichtigsten Form, der Verdopplung.

§ 34. Die täglichen Rechenübungen.

Die Bedeutung des Wortes für die Einübung der Rechensätze, wie wir sie oben dargelegt haben, und die wir früher höher schätzten als jetzt, läßt es zweckmäßig erscheinen, auf die Art und Weise dieser Übungen noch mit einigen Worten einzugehen. Die gebräuchlichste Form ist die, daß die ersten 10—15 Minuten jeder Rechenstunde zu solchen „täglichen Rechenübungen" verwendet werden. Vielfach werden da die Einmaleinsreihen aufgesagt. In unteren Jahrgängen läßt man gern mehrere Stunden hintereinander eine bestimmte Reihe — etwa die der 8 — üben, um dann zu einer anderen überzugehen, die nun so lange in den Übungsminuten gelernt wird, als es nötig erscheint. Später läßt man wohl die Reihen

von Stunde zu Stunde wechseln, endlich zwei Reihen einander gegenüberstellen. Die Reihen werden ferner vorwärts oder rückwärts oder in einer vereinbarten Folge (z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 10, 8, 6, 4, 2 oder 1, 4, 7, 10, 3, 6, 9, 2, 5, 8 mal usw.) aufgesagt. Sie erscheinen endlich außer in der Form der Multiplikation auch in der des Enthaltenseins, des Teilens und des Zerlegens. Außer dem Einmaleins hält man gemeinhin noch eine große Reihe anderer Übungen der Einprägung für bedürftig. Doch gehen hier die Ansichten mehr auseinander. Es ist das erklärlich bei der im allgemeinen noch zu geringen Zielbewußtheit unseres Rechenunterrichts, die ein intuitives Erfassen des Notwendigen begünstigt. Zwei solcher Zusammenstellungen, verschieden voneinander und doch beide eine gute Beobachtung verratend, seien im folgenden wiedergegeben.

I.

A. Addition und Subtraktion.

1. Das Einsundeins. 7 + 2.
2. Das Einswenigereins. 8 — 3.
3. Das Ergänzen zu 10. Ergänze 5 zu 10!
4. Die Einerübergänge durch Addition. 9 + 4.
5. Die Einerübergänge durch Subtraktion. 14 — 5.
6. Das Übergangszählen. Zähle bei 29 weiter, von 22 zurück!
7. Das Zehnundzehn. 60 + 30.
8. Das Zehnwenigerzehn. 80 — 50.
9. Das Ergänzen reiner Zehner zu 100. Ergänze 80 zu 100!
10. Die Einerreihen aufwärts. 7 + 7 bis 100.
11. Die Einerreihen abwärts. 94 — 7 bis 3.
12. Die Zehnerübergänge durch Addition. 70 + 50.
13. Die Zehnerübergänge durch Subtraktion. 120 — 70.
14. Das Hundertundhundert. 800 + 100.
15. Das Hundertwenigerhundert. 800 — 400.
16. Das Zuzählen reiner Zehner zu gemischten Zehnern. 87 + 10.
17. Das Zuzählen reiner Zehner zu gemischten Hundertern. 237 + 40.
18. Das Abzählen reiner Zehner von gemischten Zehnern. 97 — 40.
19. Das Abzählen reiner Zehner von gemischten Hundertern. 938 — 20.
20. Das Zuzählen reiner Hunderter zu Einern, gemischten Zehnern und gemischten Hundertern. 211 + 300.
21. Das Abzählen reiner Hunderter von gemischten Hundertern. 834 — 500.

22. Das Ergänzen reiner Hunderter zu 1000. Ergänze 600 zu 1000!

23. Die Hunderterübergänge durch Addition. 700 + 500.

24. Die Hunderterübergänge durch Subtraktion. 1200 — 900.

B. Multiplikation und Division.

1. Das kleine Einmaleins. 6×7.

2. Die Umkehrungen des kleinen Einmaleins. 4 in 36.

3. Das Malnehmen im kleinen Einmaleins mit Zuzählen von Grundzahlen. 7×8+3.

4. Das Zerlegen, Enthaltensein und Teilen mit Resten. 37 : 7.

5. Das Zehnereinmaleins. 5×70.

6. Die Umkehrungen des Zehnereinmaleins. 350 : 7.

7. Das Malnehmen der Zehnerzahlen mit Zuzählen reiner Zehner. 4×80+20.

8. Das Zerlegen, Enthaltensein und Teilen im Zehnereinmaleins mit Resten. 480 : 7.

9. Das Feststellen der Summanden beim Teilen durch Grundzahlen im Zahlenraum von 1—100.

10. Das Feststellen der Summanden beim Teilen durch Grundzahlen im Zahlenraum von 1—1000.

(hier ist kein Beispiel angeführt; jedenfalls bei Neunerteilung: 67 = 63 + 4).

(Aus Lahme, Die ersten 10 Minuten der Rechenstunde. Die Sonde 1913, Heft 4, S. 174 u. 175.)

II.

8. Klasse. 2. Halbjahr.

1. Zerlegen der Grundzahlen in 2 Summanden.
2. Ergänzen der Grundzahlen zu 10.

7. Klasse. 1. Halbjahr.

1. Zuzählen der Grundzahlen zu sämtlichen Grundzahlen.
2. Abziehen der Grundzahlen im Zahlenkreise 1—20.
3. Einmaleins mit 2 und Umkehrung.

2. Halbjahr.

1. Reihenbildungen vorwärts und rückwärts durch Zerlegen resp. Abziehen der Grundzahlen im Zahlenkreise 1—100, besonders Übung der Einmaleinsreihen, 6+6, 60—6.
2. Einmaleins und Umkehrungen.

6. Klasse. 1. Halbjahr.

1. Reihenbildungen vorwärts und rückwärts im Zahlenkreise 1—100, besonders Übung der Einmaleinsreihen, z. B. 7, 14, 21 usw., 70, 63, 56 usw.

2. Ergänzen 2stelliger Zahlen zu den vollen Zehnerzahlen, besonders zu 20, 30, 50, 100.

3. Einmaleins und Umkehrungen.

4. Teilen innerhalb des Einmaleins ohne und mit Rest, besonders der vollen Zehner.

Dazu im 2. Halbjahr.

5. Reihenbildungen mit vollen Zehnerzahlen, z. B. 70 + 60, 1000 — 80 usw.

6. Das Einmaleins der Zehner und Umkehrungen.

7. Einmaleins mit 12 und 15 und Umkehrungen.

5. Klasse.

1. Das kleine Einmaleins, das Einmaleins mit 12, 15, 24 und 25, das Einmaleins der Zehner und Umkehrungen.

2. Teilen durch einstellige Zahlen im Zahlenkreise 1—100 mit Rest, besonders Teilen der Zehnerzahlen durch die Grundzahlen.

3. Reihenbildungen durch Zuzählen und Abziehen 2stelliger Zahlen im Zahlenkreise 1—1000.

4. Anwendung von Rechenvorteilen beim Zuzählen und Abziehen.

5. Ergänzen 2stelliger Zahlen zu 100 und 3stelliger zu 1000.

(Aus h—g, Tägliche Rechenübungen. Schulpflege 1913, Nr. 10, S. 115.)

Allgemein läßt sich zu diesen und allen ähnlichen Rechenübungen bemerken, daß die Geläufigkeit nur langsam erworben wird, jedenfalls nicht in einem Jahre, daß sie auch zum nicht geringen Teil wieder verloren geht, wenn die entsprechende Übung ruht. Daher hat das Erwerben und Erhalten der Technik auch noch auf der Oberstufe als Teilziel des Rechenunterrichts zu gelten. Und dann noch ein anderes. Es kann jemand die schönsten Zusammenstellungen solcher Übungen haben, sie fleißig treiben und doch nicht Befriedigendes erreichen, während ein anderer ohne solche Übungen auszukommen scheint und Hervorragendes leistet. Es kommt eben nicht so sehr auf das Vorhandensein einer Übung an, als auf den rechten Betrieb. Dessen erstes und wichtigstes Kennzeichen ist aber — wir werden nicht müde, dies zu betonen — die Anschauung, die Konkretisierung, die Raumvorstellung. Nur wo sie in der nötigen Stärke und Breite vorausgegangen ist, nur wo sie sofort und unter allen Umständen ins Bewußtsein gerufen werden kann, da ist das Wort berechtigt, als Übung zu gelten. Darum muß der Betrieb solcher Übungen überall zur Konkretisierung, zur Raumvorstellung anregen, des Lehrers Beobachtung muß darauf eingestellt sein, zu merken, ob das Kind diese Raumvorstellung bereit hat. Der Befehl: Zeige

mit den Händen! und die Frage: Was stellst du dir vor? werden öfter die äußeren Mittel dazu sein[1]).

Dazu kommt ein zweites Kennzeichen, das zwar niemals die Bedeutung des ersten erreicht, gleichwohl aber noch von großer Wichtigkeit ist. Allen diesen Übungen nämlich, den vorstellenden Rechenübungen wie erst recht den stärker abstrahierenden Wortreihen, ist nur dann der rechte Erfolg beschieden, wenn sie gefühlsbetont gestaltet werden. Ein recht brauchbares Mittel für diesen Zweck, und zwar nicht etwa bloß für untere Jahrgänge, ist der Wetteifer, dessen Entfaltung schon mehrfach angedeutet worden ist, z. B. bei den Zahlauffassungsübungen. Er läßt sich natürlich auch für alle anderen Übungen in fruchtbarster Weise verwenden. Das im Chore erfolgende Wettrechnen, bei dem das Kind sich setzen darf, das die Lösung zuerst richtig sagt, ist nicht unbedingt zu empfehlen. Es hält bei größeren Klassen zu lange auf, gibt leicht Anlaß zu gegenseitigem Überschreien, läßt die Rascheren leicht untätig und deprimiert die Schwachen. Wer auf diese Nachteile achtet, um ihnen in geeigneter Weise entgegenzuwirken, wird ja auch diese Form des Wetteifers mit Gewinn anwenden können. Besser hat sich bewährt ein Wettrechnen in kleinen Gruppen von 2—3, auch 4 Kindern, wobei alle übrigen die Richtigkeit kontrollieren und zugleich acht geben, wer von diesen wenigen „am besten" rechnen konnte. Da man diese Gruppen nach der Fertigkeit zusammenstellen, z. B. die beiden Besten ihre Kräfte messen lassen kann usw., so ist die Möglichkeit gegeben, daß jedes Kind es einmal besser machen kann als sein oder seine Gegner. Eine andere, auch bewährte Form des Wettrechnens ist es, für eine genau abgegrenzte Leistung, z. B. eine Einmaleinsreihe, die dafür gebrauchte Zeit in Sekunden zu notieren, und dann, wenn alle durch sind, was natürlich nicht hintereinander in derselben Stunde geschehen soll, mittels Durchschnittsrechnung die Schnelligkeit der Mädchen und Knaben, der linken und rechten Hälfte usw. festzustellen. Selbstverständlich rechnen die Kinder das aus. Der Wetteifer der Parteien klingt manchmal lange noch nach und bewirkt auch freiwillige häusliche Übung.

Größere Schüler bekommen schon ein Bewußtsein von der höheren Leistungsfähigkeit dessen, dem die Rechensätze geläufig sind. Sie gewinnen damit einen gefühlsmäßigen Eindruck von der Notwendigkeit der Geläufigkeit und geben sich unter diesem

[1]) Die beiden oben wiedergegebenen Beispiele machen allerdings nicht den Eindruck, als sollte nun die Raumvorstellung in ausgiebiger Weise herangezogen werden. Zumal das erste scheint noch stark dem Glauben an die Wirkung des Wortlernens zu huldigen, wenn das Übergängezählen als 6. Übung und die Zehneraddition (wo also die Kinder doch schon das System kennen lernen) als 7. erscheint.

Eindrucke ganz gern auch mechanischen Einübungen mit Eifer hin. Das „Ich kann es" und noch mehr das „Ich kann es nun viel besser, ganz sicher", hat eine zauberhafte Wirkung.

Daß auch der Wechsel zwischen technischen Übungen und anderem Rechnen, wie auch die belebende Wirkung der Lehrerpersönlichkeit zur Erhöhung der Gefühlsbetontheit beiträgt, sind alte pädagogische Wahrheiten, die nur das Üble an sich haben, daß man ihre Verwirklichung nicht gut aus Büchern lernen, überhaupt selten lernen kann, sondern daß sie aus dem Herzen quellen müssen. Jeder, der Schüler war, wird uns verstehen.

So sind es vor allem Tätigkeits- und Erfolgsgefühle, die intellektuellen Gefühle der neuen Einsicht, das Bewußtsein des Zuwachses an Kraft und Geschicklichkeit, auch wohl Lustgefühle des Witzes und sogar einmal milder Schadenfreude, dazu Spannungsgefühle der Neugier und Lösungsgefühle des Wechsels, welche in den Schülern den Willen zur Übung auslösen. Diesem Willen zur Übung aber ist der Erfolg sicher.

Auf zwei Hilfsmittel unserer eigenen Praxis mag noch kurz hingewiesen werden. Zunächst darauf, daß die großen Zahlbildtafeln, welche vor allem für die Zahlauffassungsübungen in der Klasse bestimmt sind, sich auch für die Zwecke einer vernünftigen Operationsübung als höchst verwendbar erwiesen haben. So ließen sich alle möglichen Zerlegungen und Ergänzungen an ihnen mit viel größerem Erfolg üben, als wenn man nur die Zahl zu sagen genötigt ist. Denn der Zahlauffassung, welche während einer gewissen Zeit die einzige Übung gewesen war[1]), konnte bald die andere Aufgabe angeschlossen werden: Seht die Zahltafel an, aber sagt nur, was an 100 fehlt! Das wurde rasch zu nicht geringer Fertigkeit entwickelt. Später wurden diese Übungen dahin abgeändert: Sagt, wieviel an 80 fehlt! Wenn dann Zahlbilder über 80 erschienen, beispielsweise 96, dann sagten die Kinder ohne jede Anleitung: 16 mehr. Aus den Ergänzungsübungen wurden von selbst immer mehr Zerlegungsübungen, je weiter wir herunter gingen: Ergänzt zu 60, zu 40, zu 20! Später: Ergänzt zu 50, 30, 70, 90! Wieder später: Ergänzt zu 88, zu 75, zu 67, zu 53 usw.

Unmerklich führten diese Übungen zu Subtraktionen: Nehmt von den erscheinenden Zahlen sofort 20 weg! Oder 40, 30, 25, 16, 39 usw.

Ebenso zu Additionen: Zählt immer 20 hinzu! Dabei wurde

[1]) Vergl. die Schilderung des äußeren Verfahrens S. 173. Die dort angegebenen Zeiten für die Geschwindigkeit der Übung wurden auch bei Operationsübungen erreicht.

öfter der Hunderter überschritten, selbstverständlich ohne irgendwelche Schwierigkeiten. Weiter: Zählt 40, 70, 35, 66 hinzu!

Die Multiplikation erschien lediglich als Verdopplung der erblickten Zahlbilder. Hier zumal gelangten die Kinder zu einer recht befriedigenden Geschwindigkeit. Sie verlangten selbst nach schwereren Übungen, z. B. die gesehenen Zahlbilder verdreifachen zu dürfen. Dies versuchten wir zwar erst so, daß wir die größeren Zahlbilder überschlugen, aber das merkten sie bald und baten auch um diese. Die Multiplikation mit 4 folgte, die mit 5 wurde als besonders leicht empfunden, die mit 6, 7, 8 und 9 zwar als schwerer, aber doch in solchem Sinne als „fein", daß die Kinder lieber bei schwereren dranzukommen wünschten — hauptsächlich bei der Form des gruppenweisen Wettrechnens. Ja, wir konnten auch darüber noch hinausgehen und versuchten es gelegentlich mit noch höheren Malzahlen. Damit waren die Multiplikationsübungen ohne Mühe in den Zahlenraum bis zur 1000 verlegt worden, und zwar — wir gestehen dies gern — zu unserer eigenen Überraschung, denn wir hatten nicht geglaubt, daß man schwachen Kindern, wie wir sie unter unserer Schar haben, derartiges zumuten dürfe. Aber wirkliche Anschauung und Gefühlsbetontheit sind ihnen gerade am meisten nötig. Wir wünschen den Amtsgenossen aller Art die gleichen erfreulichen Erfahrungen.

Die Divisionsübungen waren im Verhältnis dazu fast zu leicht, bewegten sie sich doch zunächst nur im Gebiete des kleinen Einmaleins. Und dabei hatten wir sogar unterlassen, die passenden Zahlbilder herauszusuchen und zusammenzustellen, was sich für Anfangsübungen empfehlen dürfte. Das schien aber unsern Kindern gerade Freude zu bereiten, sie halbierten jetzt die Zahlbilder mit gleicher Schnelligkeit, wie sie sie verdoppelt hatten, und warfen — zunächst ganz gegen unsere Absicht — statt des „Rest 1" das Halbe hinein. 75 zeigte das Zahlbild, 37½ lautete die Angabe der Kinder kaum 2 oder 3 Sekunden später. Und in derselben Weise wurde nach und nach zur Division mit den übrigen einstelligen und einer Anzahl von zweistelligen Teilern geschritten, wobei fast überall Reste erschienen, die aber von einzelnen weiter fortgeschrittenen Kindern sofort als Brüche ausgedrückt wurden. Sollten wir dies verhindern?

So sind uns die großen Zahlbildtafeln getreue Gehilfen einer psychologisch gerichteten Übung und Einprägung der Assoziationen geworden, die wir nicht missen möchten, und deren Wirkung wir gern auch der häuslichen Übung des einzelnen Kindes zugänglich machen würden. (Siehe Anhang.)

Wiederholt aber sei betont, daß gerade solche Erfahrungen mit voller Deutlichkeit zeigen, wie es etwas ganz ungleich Wirksameres

und Wertvolleres ist, wenn hinter dem „reinen Begriff“ die Raumvorstellung steht. —

Neben diesen Zahlbildtafeln ist es noch ein **Rechenzettel**, der uns seit vielen Jahren manche Dienste geleistet hat. Er besteht aus 100 Zentimeterquadraten (die sich die Kinder selbst herstellen können), in welche die Zahlen 1—10 in folgender Anordnung eingeschrieben werden:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	
L	1	3	2	10	9	6	5	8	7	4	l
M	4	10	7	3	2	9	6	5	8	1	m
N	10	1	6	7	4	8	3	2	5	9	n
O	7	2	1	6	5	10	8	4	9	3	o
P	3	9	10	1	6	5	2	7	4	8	p
Q	6	5	3	8	10	2	4	9	1	7	q
R	9	6	8	2	1	4	7	3	10	5	r
S	5	7	4	9	8	1	10	6	3	2	s
T	2	8	5	4	3	7	9	1	6	10	t
U	8	4	9	5	7	3	1	10	2	6	u
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	

Jede senkrechte und wagerechte Reihe enthält alle 10 Zahlen in immer anderer Anordnung. Durch die Bezeichnung der Reihen mit Buchstaben (A die 1. senkrechte, M die 2. wagerechte, klein c die 3. senkrechte, aber von unten usf.) erhalten wir nun die Möglichkeit, 40 verschiedene Reihen rechnen zu lassen. Man sieht sofort, daß er sich für alle möglichen Übungen auf allen Stufen verwenden läßt. Doch haben wir davon abgesehen, ihn auf der Unterstufe zu brauchen, solange die Kinder die Zahlenreihe noch nicht erworben haben. Der nächste Abschnitt enthält die Begründung dafür. Der Rechenzettel ist ja auch seinem ganzen Charakter nach nicht ein Mittel zur Einführung, sondern setzt eigentlich volle Klarheit voraus und will nur der assoziativen Befestigung und Beschleunigung dienen. Wir möchten also ausdrücklich vor einem zu frühen und falschen Gebrauche gewarnt haben. Wo aber die Funktionalzahl vorhanden und gesichert ist, da hat er sich als brauchbares Hilfsmittel für vielerlei Übungen erwiesen.

Nur ein paar Beispiele aus dem Gebiete der Multiplikation:

Reihe A mal 6! mal 3, mal 8, mal 12, 16, 25 usw. Das Kind, welches nun aufgerufen wird, rechnet rasch die folgende Reihe; der Reihenbeginn wechselt. Schon dies Beispiel zeigt Übungen, die sich durch mehrere Jahre erstrecken werden. Oder: Von Reihe F an jedesmal 10 dazu denken und nun mal 5 nehmen! Oder: Alle Zahlen als Zehner ansehen und mal 7 usw. nehmen! Oder: Überall eine 6 dahinter denken und mal 4 nehmen!

In solcher Weise lassen sich auch Divisionsübungen, auch Additionen und Subtraktionen vornehmen. Schwerer werden sie alle, wenn man gleich zwei hintereinander stehende Zahlen als Zehner und Einer zusammenstellen und mit ihnen operieren läßt, z. B. Reihe G und H: 58, 65, 32, 84 usw.

Mit Hilfe dieses Zettels konnten die assoziativen Übungen z. B. des kleinen und sogar die anders gearteten des großen Einmaleins auf das Ziel möglichst geringen Zeitverbrauchs eingestellt werden. Doch sei nicht verschwiegen, daß er den großen Nachteil aller solchen Lehrmittel und Übungsformen der Vergangenheit an sich hat, daß er die Raumvorstellung unbeachtet läßt, selbst wenn der übrige und insbesondere der vorhergegangene Rechenunterricht sich ihrer fleißig angenommen hätte. In dieser Hinsicht sind ihm die Zahlbildtafeln weit überlegen.

§ 35. Der Gebrauch der Ziffer.

Das Wesen der Ziffer ist schon in einem früheren Abschnitte erörtert worden. Sie ist ein Schriftsymbol, aber wie alle Schriftsymbole zunächst nicht ein Symbol für den zu denkenden Begriff, sondern für das den Begriff — hier im besonderen den Zahlbegriff — deckende Wort, das **Zahlwort**. Dieser symbolische Charakter höherer Art, gewissermaßen 2. Ordnung, zeigt sich noch deutlicher bei den aneinander gereihten Zügen unserer üblichen Schreibschrift, wo z. B. die Zusammenstellung folgender Schriftzüge *Feder* nicht etwa das Zeichen, das Symbol für einen bestimmten Gegenstand darstellt, sondern ein Schriftsymbol ist für den Lautkomplex des Wortes, das nun seinerseits wieder ein Symbol ist für Vorstellung und Begriff. Man darf solchen Darlegungen auch nicht entgegentreten wollen mit Hinweisen wie dem: Solche Schriftsymbole für die Wörter seien in der buchstäblichen Darstellung der Zahlwörter gegeben, also z. B. in der Form „zwölf", während die Zifferdarstellung „12" doch direkt das Symbol für den Begriff bedeute. Aber wer so schließt, setzt Unterschiede, wo gar keine bestehen. Schreiben wir doch auch Grad mit °, Bogenminute mit ′, Pfennig mit ₰, Pfund mit ℔, die Planeten mit ihren Zeichen ☿ ♀ ♁ ♂ ♃ ♄,

die ganz den Charakter der Ziffer haben, jedenfalls den meisten nicht als Abkürzungen bewußt sind. Hierher gehören auch die Interpunktionszeichen. Wer so schließt, ist sich ferner nicht bewußt der Entwicklung des menschlichen Geistes, der in Stammesentwicklung wie Einzelentwicklung das Wort gebraucht, lange bevor ein Bedürfnis nach Wortzeichen sich geltend macht.

Dieses symbolischen Charakters der Ziffer, die also ein sichtbares Ersatzmittel für das hörbare Zahlwort ist, müssen wir uns immer bewußt sein, wenn wir ihre unterrichtliche Behandlung recht gestalten wollen[1]). Denn aus diesem Bewußtsein geht unbedingt hervor, daß Ziffern so lange nicht benutzt werden dürfen, als die Kinder die Zahlgrößen noch dinglich erfassen. Und selbst dann, wenn die Kinder auf der folgenden Stufe symbolische Raumgrößen für die Dinge einsetzen lernen, würde die Ziffer nur störend wirken. Erst dann, wenn das Zahlwort die hauptsächlichste Stellvertretung für den Zahlbegriff geworden ist, wenn also die Abstraktion in der Zahl- wie in der Operationsauffassung schon stärker vorgeschritten ist, erst dann darf eine graphische Symbolisierung dieser lautlichen Abstraktion hinzukommen. Sie wird nunmehr keine Schwierigkeiten bereiten, sondern als Erleichterung gefühlt werden. Das aber sind die Kennzeichen dafür, ob ihr Eintritt verfrüht war oder nicht.

Darum gehört die Ziffer nicht auf die erste Stufe des Rechenunterrichts. Sie darf ebensowenig dem ersten Rechnen parallel gehen, wie das Schreiben dem Sprechenlernen parallel gehen kann. Denn zu Ziffernlernen und Rechnen als Parallele Schreiben und Lesen treten zu lassen, ist ein ganz erstaunlicher Irrtum, der aber sonderbarerweise den elementaren Rechenunterricht zurzeit so gut wie völlig beherrscht, allerdings gegen den Widerspruch einiger weniger denkenden Erzieher.

Die Ziffer von der ersten Stufe des Rechenunterrichts auszuschließen, ist nun freilich eine Forderung, die manchem Pädagogen Kopfzerbrechen machen wird. Innerlich möchte er ihr zustimmen, auch seine Erfahrung mit den Schulneulingen gibt dieser Forderung recht. Aber wie soll er nur die Kleinen beschäftigen, wenn er Abteilungsunterricht hat, oder wenn Hausaufgaben gewünscht werden! Dazu einige Andeutungen. Wir haben schon früher hingewiesen auf die dingliche und später auf die symbolische Darstellung der Zahlgrößen und der Operationen. Das Malen der Dinge und später der rhythmisierten Symbole nimmt in der Hauptsache die Stelle ein, die wir bisher in zweckloser Weise

[1]) Die Verkennung dieser Verhältnisse und der daraus sich ergebenden Folgerungen hat zu den wunderlichsten Versuchen der Elementarlehrer geführt, die Ziffern den Schulanfängern mundgerecht zu machen.

mit Zifferrechnen ausfüllten. „Malt 4 Kinder, 4 Fahnen, 4 Kreisel, 4 Flinten, 4 Bäume ... setzt selbst fort!" Oder: „Malt einen Baum, 2 Kinder, 3 Bälle, 4 Peitschen ... setzt selbst fort! Umgekehrt! Malt wieder ...! Malt überall noch eins hinzu und zählt dann! Malt nun noch überall zwei hinzu und zählt wieder! Streicht überall eins aus und zählt wieder!" Ferner werden Kindergeschichten im Bilde dargestellt und rechnerisch ausgewertet (wir haben schon Beispiele davon gegeben): Kinderspiele, Einkaufen beim Kaufmann, beim Bäcker, beim Fleischer, beim Milchmann, im Grünwarenladen; Ausflüge machen, Abendbrot essen usw. usw. Das ist mehr wert für die mathematische Bildung, als die Schulanfänger quälen mit halben und ganzen Seiten voll Rechensätzchen wie 1+1=2, 2+1=3 usw., denen sie doch gar keinen Sinn und gar keine erfreuliche Seite abgewinnen können, ja die die Kinder — wie schon dargelegt wurde — dazu führen, das Wort und das Zeichen **an die Stelle** der Sache zu setzen, Wörter und Zeichen freudlos — oder, falls der Lehrer recht freundlich ist — wenigstens zwecklos auswendig zu lernen, um erst später, nach mancher bitteren Erfahrung, dahin zu gelangen, den Surrogatcharakter von Wort und Zeichen zu fühlen. Dann ist aber meist das Interesse für die mathematische Erfassung der Dinge schon gründlich verleidet.

Wer an diesen Darlegungen noch zweifeln wollte, dem können wir nur empfehlen, selbst die Probe zu machen und die Ziffern so weit hinauszuschieben, als es irgend geht, z. B. so weit, bis die Kinder selbst die Notwendigkeit spüren, ihrer mathematischen Erfassung der Dinge dauernde Form zu geben.

Dieser Gedanke führt uns hinüber zu der Frage: Welche Rolle spielt die erste Zifferbehandlung im Unterrichte? Oder: Welchem Zwecke dient die Ziffer, wenn sie im Unterrichte auftritt? Wir antworten darauf: Nicht etwa dazu, Rechensätzchen durch hundert- und aberhundertmaliges Abschreiben einzuprägen; sondern die Ziffer darf längere Zeit hindurch nur den Charakter eines **Notizmittels** haben. Jede Rechnung wird anschauend und handelnd oder vorstellend ausgeführt; die Ziffer tritt aber nur dort auf, wo es sich darum handelt, mehrere Zahlenangaben oder Ergebnisse im Gedächtnis zu behalten.

Bei solchem Verfahren verursacht es auch gar keine Schwierigkeiten, das Bild der Ziffer den Kindern einzuprägen. Zweierlei ist zu unterscheiden: Auffassung und Darstellung, Lesen der Ziffern und Schreiben. Aber von vornherein ist auszusprechen, daß es ein großer Irrtum ist, zu fordern, daß Lesen und Schreiben aus Gründen der psychischen Ökonomie **zugleich** gelernt werden müsse. Wir lesen die Großbuchstaben der Frakturschrift, aber schreiben kann sie überhaupt niemand; und in vielen Versuchsklassen lernen

die Kinder spielend Antiqua lesen, und zwar ohne Schreiben. Das L e s e n der Z i f f e r n lernen nun die Kinder gewissermaßen ohne den Willen des Lehrers, ja selbst, wenn er sie davon anscheinend zurückhalten wollte, an M ü n z e n und am M e t e r m a ß, die in der Schule und zu Hause benutzt werden, an der U h r und am A b r e i ß k a l e n d e r, die wir nicht nur in jedem Hause finden können, sondern die wir auch in der Schulstube aufgehängt sehen möchten. Der letztere ist gewöhnlich umsonst zu haben; je größer seine Ziffern und Buchstaben sind, desto besser. Das also sind die Gelegenheiten, wo die Kinder mit den Ziffern lesend vertraut werden. Lange Zeit mögen sie diese Kenntnisse schon haben, ehe sie sie für ihre eigenen Zwecke, für ihre Notizzwecke verwenden. Es muß ihnen eben erst das Bewußtsein dafür aufgehen, daß es eine Ersparnis bedeutet, daß es darum zweckmäßig ist, sich der Ziffern zu bedienen.

Und auch dann noch wartet des Lehrers eine hemmende Aufgabe. Wenn die Ziffer zwar schon als Notizmittel der Befähigteren zugelassen worden ist, dann darf sie doch nur insoweit gebraucht werden, als das betreffende Kind in der Lage ist, Rechenschaft darüber zu geben, daß eine wirkliche Acht, eine richtige Acht ganz anders aussieht, als eine geschriebene Acht, die wirkliche nämlich so:

[illegible] oder so: ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

die geschriebene aber so: 8; weiter, daß man rechnen dürfe nur mit wirklichen Achten, zum Notieren aber die geschriebene verwende. Wenn das längere Zeit durchgeführt wird, dann wird man sich wundern über die Fortschritte, die sich ganz anders gestalten, als sie gegenwärtig sind. Kommt dann die Zeit, daß die Kinder auch lernen sollen, „mit geschriebenen Achten" zu rechnen, so macht das nicht die geringsten Schwierigkeiten, weil es oben nur erlaubt zu werden braucht.

'Aber das r i c h t i g e Schreiben der Ziffer! wird manch Ängstlicher einwenden. Wenn nun ein Kind, wie es schon vorgekommen sein soll, die 5 so schreibt, daß es an der durch einen Pfeil bezeichneten Stelle anfängt: 5↖; da lernt es doch nie im Leben eine schöne 5 schreiben! Ja, eine schöne im Sinne des Henzeschen oder eines anderen eingeführten Duktus vielleicht nicht, aber doch vielleicht eine recht deutliche, und „die größte Deutlichkeit war mir immer die größte Schönheit". Überdies kennen wir mehrere Amtsgenossen, von denen schreibt der eine die 6 so, daß er von innen anfängt, ein anderer macht es mit der 9 so, ein dritter beginnt bei der 8 oben mit dem rechten Teil statt mit dem linken, und

dabei sind alle diese Ziffern recht deutlich und gefällig dazu[1]). Wir können uns also nicht davon überzeugen, daß es im Rechnen nötig sei, die Kinder die Ziffern schreiben zu lehren. Wozu wären denn auch Schreibstunden da? Überdies braucht der einsichtige Lehrer gewiß nicht darauf zu warten, die Kinder können die Ziffern schreiben, vielleicht eher, als ihm lieb ist. Und schlecht geschriebene Ziffern sieht man auch bei Kindern, die sie methodisch schreiben gelernt haben; doch dies steht auf einem anderen Blatte.

Während also im künftigen Rechenunterricht die Ziffer längere Zeit nur die Bedeutung einer mathematischen Stenographie hat, die ein rasches Notieren ermöglicht, gewinnt sie erst später — ganz unmerklich — auch die Bedeutung und den Wert der Stellvertretungsvorstellung des Zahlbegriffs. Das geschieht aber eigentlich erst dann, wenn die Zahlen, mit denen das Kind arbeitet, so groß werden, daß der Vorstellung und dem Merken immerhin Schwierigkeiten entstehen. Nach unseren Erfahrungen ist das eigentlich noch nicht der Fall während der Behandlung des Zahlenraumes bis 100, besser während der Behandlung der Zahlenreihe[2]). Erst wenn man darüber hinausgeht, wenn die Zahlauffassung des Systems einsetzt, wird das anders. Nun kommt die Zeit, in der die Ziffer, zumal als Positionsziffer, leise neben die dingliche oder symbolische Vorstellung tritt, um bei der Veranschaulichung und Verdeutlichung des Zahlbegriffs mitzuwirken, ohne freilich jene symbolische oder eine schwache Raumvorstellung ganz zu ersetzen. Nur besondere Gewöhnung, nicht einmal visuelle Veranlagung, kann dahin führen, daß jemand Rechnungen, die er im Kopfe ausführt, lediglich in Ziffern vorstellt. Fernsprechnummern, Jahreszahlen, statistische Größen usw. behalten wir ebensogut akustisch oder mit einem räumlichen Vorstellungsrest, wie in Ziffern. Wenn aber die erwähnte Zeit gekommen ist, dann mag man auch eine etwa dahingehende Anlage gewähren lassen, sie entwickeln und üben mit der gelegentlichen Frage: Wie stellst du dir diese Zahlen vor? Dann gewinnt die Ziffer auch im Rechnen ihre volle Bedeutung. Auf der Unterstufe aber ist sie schädlich.

§ 36. Mündliches und schriftliches Rechnen.

Die Ausführungen des vorigen Abschnitts zeigten, daß die Ziffer verhältnismäßig spät einzusetzen hat. Dazu kommt, daß die mathematische Form, in der doch das schriftliche Rechnen

[1]) Um nicht in den Verdacht zu kommen, ich spräche pro domo, will ich erklären, daß ich sämtliche Ziffern in meiner Handschrift jederzeit normal, d. h. in der Weise des eingeführten Duktus dargestellt habe und noch schreibe.

[2]) Als Notizmittel wird die Ziffer selbstverständlich schon während der Behandlung der Zahlenreihe gebraucht.

in der Hauptsache zu erfolgen hat, eine besondere Aufgabe darstellt, wie auch schon in einem früheren Abschnitte ausgeführt wurde. Beide Gedanken zusammengenommen ergeben die Forderung, daß zunächst auf der Unterstufe das **mündliche Rechnen durchaus im Vordergrunde der Arbeit** stehen muß, ja, daß das übliche schriftliche Rechnen längere Zeit überhaupt noch nicht erscheinen darf, daß infolgedessen auch die **Operationszeichen** für die ersten Stufen noch nicht in Betracht kommen.

Ist es doch nicht etwa nur sinnlos, sondern geradezu sinnwidrig, die Kinder malen zu lassen

||| + || = |||||!

Sie haben da doch eben nicht 5, sondern 10 Striche gemalt. Man muß sich nur einmal klar machen, was man mit dieser Aufgabe von ihnen verlangt — und zwar abgesehen von dem Verlangen der mathematischen Form und der richtigen Anwendung der Operationszeichen! Nichts anderes als dies, daß man ernsthaft folgende Sätze schreiben solle:

Wenn ☽ scheint, ist ⊙ untergegangen.

Wenn 2 ʃʃ des ┌┐ zu - sind, steht ▭ \

(Beine, Tisch, kurz, Platte, schief); d. h. abstrakte Gedanken mit Hilfe konkreter Bilder. Sie sind nicht um ein Haar besser und didaktisch nicht anders zu bewerten als Bilderrätsel von der Art des

Sch ✳ d ⬭ n H ⬭ m!

Wem das noch nicht einleuchtet, der mag die übrigen Operationen heranziehen:

||||| — || = |||.

Hat hier das Kind wirklich von den 5 Strichen 2 weggenommen? Nein, es hat noch 2 neue hinzugefügt, oder vielmehr 3, einen wagerechten noch. Oder

||| · ||| = ||||||||| oder |||||| : || = |||.

Bei jener Form hat es nicht 3·3, sondern 2·3 und dann noch 3·3 hingemalt. Bei dieser hat es die vorhandenen 6 zunächst um 2 und dann noch um 3 neue vermehrt; geteilt hat es überhaupt nicht, und doch wäre das ganz gut möglich durch einen längeren Teilstrich oder einen Teilpunkt in der Mitte.

Welche schulmeisterliche Kurzsichtigkeit zeigt sich in solchen Beispielen! Es ist wirklich dringend nötig, daß man über Wesen

und Zweck einerseits, über die Möglichkeit und die Voraussetzungen jeglicher didaktischer Tätigkeit mehr nachdächte, als es bis dahin geschah, und zwar an der Hand exakter kinderpsychologischer Studien, nicht unter gelegentlicher Berufung auf Erinnerungen an Kenntnisse, die man sich einst aneignete auf dem Gebiete einer Spekulation über die Psyche des Erwachsenen.

Darstellungen von der Art der angeführten setzen die mathematische Form voraus, welche in ihrer bis aufs äußerste getriebenen Kürze bei voller begrifflicher Klarheit eigentlich nur zu vergleichen ist der stenographischen Niederschrift eines abstrakten Satzes:

Hier entspricht das Sigel „ist“ genau dem mathematischen Gleichheitszeichen. Und nun werde man sich klar, daß solche Abstraktion auf einer Stufe verlangt wird, die zugestandenermaßen den Begriff noch in wirklichen Dingen, allenfalls schon in seinem dinglichen Symbole denkt, nämlich die 5 als fünf einzelne nacheinander hingemalte Striche. Daß so etwas möglich ist, zeigt, daß die Methodik des Rechenunterrichts noch nicht auf der wünschenswerten Höhe steht.

Darum: nicht die Form der Operation, nicht die Form der Rechensätze darf auf den unteren Stufen Ziel und Aufgabe sein, sondern ihr Inhalt. Notwendig ist die wirkliche Ausführung der Operationen, nicht ihre Andeutung durch symbolische Zeichen. Dies darf erst dann eintreten, wenn das Kind die Sache beherrscht. Dieses Ziel „Beherrschen der Sache“ wird aber zu leicht als erreicht angesehen, wenn daneben noch das andere steht „Beherrschung der Form“. Diese beiden Ziele müssen zeitlich, stufenmäßig getrennt werden, sonst kommen wir auf diesem Gebiete nicht vorwärts.

Darum darf ferner auf den Stufen, wo die Ziffer auftritt, das schriftliche Rechnen nur die Form der Notiz annehmen, wie das schon im vorigen Abschnitt ausgeführt wurde. Und zwar zunächst eine Zeitlang sogar nur die Form der Notiz des Ergebnisses. Später erst, nachdem die Kinder langsam in die mathematische Form eingewöhnt worden sind, darf als besondere Aufgabe auch ihre schriftliche Darstellung in Angriff genommen werden. Weil dann die inneren Voraussetzungen gegeben sind, macht sie auch keine Schwierigkeiten. Es sei z. B. gerechnet worden $37 + 12 = 49$ ₰. Dann heißt es: Wir wollen es einmal schreiben, und der Lehrer wählt die Form 37 und 12 sind 49 Pfennige. Mit dem Hinweis darauf, daß

das zu lange dauert, und daß die großen Leute auch kürzer schreiben, werden die ausgeschriebenen Wörter leicht durch Operationszeichen ersetzt, einschließlich des „Pfennig", das wegen des Pfundes auch nicht erst durch Pf. vertreten werden sollte. Ob man die Benennung wiederholen oder nur einmal am Ende brauchen will, hängt davon ab, wie weit die Kinder fortgeschritten sind. Mit der Subtraktion ist es auch so.

Künftighin wird nun an einzelnen Rechenaufgaben, welche dafür geeignet erscheinen, die Sonderaufgabe angeschlossen, welches wohl eine passende oder gar die passendste schriftliche Darstellung sei. Man muß bedenken, daß viele eingekleidete Aufgaben verschiedene Darstellungen zulassen. Z. B.: Wieviel bekommst du wieder, wenn du für 36 ₰ Milch holst und 50 ₰ hingibst? 14 ₰. Wer kann das schreiben? 50−36=14 ₰. Schreibt's in die Luft! Oder: 36+14=50 ₰. Oder 50−14=36 ₰ — „soviel hat nämlich der Milchmann bekommen". Oder 50=36+14 ₰, oder 36=50−14 ₰ usw. Sucht die passendste heraus. Die erste. Warum meinst du das? Weil gefragt war, wieviel man wiederbekommt, „und da paßt die am besten". Aber die Verschiedenartigkeit der Formen und ihr Wechsel soll darauf hinweisen und die Kinder dazu erziehen, nicht in der Form, sondern im Inhalte das Wesentliche zu sehen, in der Form nur den möglichst kurzen (abstrakten) Ausdruck des (konkreten) erlebten oder vorgestellten mathematischen Vorganges; ein Ausdruck, der erst auf den Zuruf des Lehrers: „Geschrieben?" gesucht und formuliert wird.

Genau das gleiche gilt von dem Gesamtgebiet des Malnehmens, insbesondere dem des kleinen Einmaleins, und von dem Enthaltensein und Teilen innerhalb des ersten Hunderters, ja möglichst weit noch darüber hinaus. Das mündliche Rechnen ist da in jeder Hinsicht die Hauptsache, und nur ein geringer Bruchteil der Zeit darf der schriftlichen Fixierung gewidmet sein.

Das Kennzeichen aber dieser Stufe des schriftlichen Rechnens ist auch jetzt noch, daß es lediglich ein Notieren ist, kein sogenanntes „schriftliches Rechnen" im üblichen Sinne. Denn alles, was bisher in Betracht kam, wurde im Kopfe gerechnet, in kurze mathematische Form gebracht und dann in Schriftzeichen festgehalten. An Höchstleistungen zeigt sich das am ehesten. Die Kinder rechnen folgende Aufgaben so:

2940 : 7

28 Hundert : 7 sind 400, 140 : 7 sind 20, zusammen 420.

79 in 1659

80 in 160 geht 2 mal, in 1600 20 mal, 79 auch 20 mal, bleiben 20 und 59, sind 79 übrig, darin geht sie 1 mal, zusammen 21 mal.

22 · 36

2 · 36 = 72 und 20 · 36 = 720; 720 + 72 = 792.

Hierbei bedeutet es natürlich eine Erleichterung, wenn die Kinder die Aufgabe in Ziffern vor sich haben. Aber wir werden uns zu überlegen haben, ob wir diese Erleichterung im gegebenen Falle gewähren sollen. Denn wir dürfen auch die Aufgabe nicht aus dem Auge lassen, das Zahlengedächtnis der Kinder zu üben, und müssen ihnen darum unbedingt zumuten, 4 Stellen — z. B. die letzte Aufgabe — ohne Ziffernhilfe zu merken. Und selbst, wenn wir bei mehr Stellen dann und wann jene Erleichterung eintreten lassen, so soll doch erst nach der vollständigen Ausrechnung die Notiz der Rechnung erfolgen in der Form:

2940 : 7 = 420
79 in 1659 = 21
22 · 36 = 792.

Das eigentliche schriftliche Rechnen ist etwas ganz anderes, das ist eine Unterstützung der Operationstätigkeit. Hier handelt es sich nicht darum, das Ergebnis zu notieren oder mit einem Satze den Gang der Rechnung zu kennzeichnen, hier soll vielmehr die schriftliche Durchführung eine Erleichterung — nicht des Kopfrechnens, sondern gegenüber dem Kopfrechnen sein.

Ein Beispiel. 37 + 16 + 48 würde man im Kopfe so rechnen können: 37 + 3 = 40, + 13 = 53, + 7 = 60, + 41 = 101. Wer rascher überblickt, würde sagen: 37 + 64 = 101 und denken: weil 37 und 63 gleich 100 ist. Beim schriftlichen Rechnen aber setzt man die drei Summanden untereinander und zählt erst die 21 Einer und dann die Zehner zusammen. Das ist ein ganz anderes Lösungsverfahren.

Es setzt voraus, daß die Einführung ins System bis zu einem ziemlich hohen Grade erfolgen konnte; ferner, daß auch der Positionswert der Ziffer, der ja mit der Einführung ins System noch nicht gegeben ist, in längeren Übungen zum Bewußtsein kam; es setzt endlich voraus, daß die Ziffer mit zur hauptsächlichsten Stellvertretungsvorstellung des Zahlbegriffs geworden ist. Da man diese gesamte Entwicklung — wie genugsam dargelegt wurde — nicht verfrühen darf, so können die Lösungsverfahren des schriftlichen Rechnens erst nach dem Erreichen eines gewissen Abschlusses in bezug auf Zahlauffassung, Operationsauffassung und Operationstechnik auftreten, d. h. nach unseren Erfahrungen frühestens im 4. Schuljahr, lieber noch später.

Und noch eins: Wenn man den Zeitpunkt für gekommen erachtet, die Kinder in die schriftlichen Lösungsverfahren einzuführen, dann soll auch in ihren Augen das ganze Gebiet als ein Gebiet **neuer Aufgaben** behandelt werden. Sie müssen von Anfang an dabei das Bewußtsein haben: das ist etwas anderes! (Nicht etwa das: das ist etwas Schwereres!) Dann werden die Lösungsverfahren des schriftlichen Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens gerade im Vergleich und im Gegensatz zu den bisherigen mündlichen Formen zu vollster Klarheit gelangen. Es ist also nötig, die Lösungsverfahren des Kopfrechnens denen des schriftlichen immer und immer wieder gegenüberzustellen. Ja, später kann man bei passenden Aufgaben erst das Problem aufstellen, ob die Aufgabe wohl rascher im Kopfe oder mit Hilfe von Papier und Feder gelöst werden möchte. Selbst einen Wettbewerb der beiden Verfahren kann man eintreten lassen.

Als letztes Ziel möchte dem Lehrer bei dem allen vorschweben, die Kinder zu dem Bewußtsein zu führen, daß das schriftliche Rechnen **sicherer**, das Kopfrechnen aber **schneller** und darum in vielen Fällen erfolgreicher ist, nämlich überall dort, wo man rasch eine Rechenprobe anzustellen hat. Das ganze wirtschaftliche Leben des Kleinbürgers ist davon voll: Was kostet ¾ ℔ Fleisch, wenn das ganze ℔ 90 ₰ kostet? Ist es recht, wenn der Fleischer für 60 g mehr 15 ₰ verlangt? Ist es vorteilhafter, 1 ℔ Fleisch mit Zulage für 90 ₰ oder ¾ ℔ ohne Zulage bei einem Pfundpreis von 1,15 ℳ zu nehmen? Wieviel erspare ich, wenn ich zur Suppe Bruchreis kaufe? Wieviel erspare ich, wenn ich gleich 10 ℔ Zucker nehme? Und bei ¼ Zentner? Wenn ich Kartoffelzeilen zum Ausmachen kaufe? Wieviel kann ich mehr verbrauchen, wenn ich Pflanzenbutter nehme statt anderer? Wieviel erspare ich, wenn ich den Anzug oder den Schrank oder das Fahrrad **sofort** bezahle?

Auch von diesem Standpunkte aus ist dem Kopfrechnen eigentlich immer der Vorzug einzuräumen, und zwar nicht nur einem Kopfrechnen, das in technischen Übungen besteht, sondern vor allem auch dem, das die Aufgaben des Lebens zunächst ohne schriftliche Hilfe zu lösen sucht. Dies Kopfrechnen muß in der Bewertung und im Ausmaß der ihm zu gewährenden Zeit auf der Mittelstufe dem schriftlichen Rechnen gegenüber stark überwiegen, auf der Oberstufe ihm mindestens gleich stehen.

6. Abschnitt des Lehrverfahrens:

Die weiteren Rechnungsarten.

§ 37. Die Bruchrechnung.

In einem früheren Abschnitt kam es uns darauf an, die Auffassung der Bruchzahl und die Einführung in das Verständnis zu zeigen. Jetzt sollen die Operationen innerhalb der neuen Zahlform durchgeführt werden. Dazu macht sich zunächst eine Übersicht über die in Betracht kommenden Übungen nötig, eine Übersicht, wie sie auch schon in dem Abschnitte von der Fortführung der Operationen sich als zweckmäßig erwies. In früheren Abschnitten, wo es sich um die Gewinnung und Einübung der einzelnen Operationen handelte, kam eine solche Übersicht noch nicht in Frage. Hier aber ist dies der Fall, weil eben die Operationen beherrscht werden und in ihrer Gesamtheit Anwendung finden sollen auf einem besonderen Gebiete des Zahlbegriffs. Diese Übersicht gestaltet sich so:

1. Verwandeln a) von ganzen Zahlen in Brüche, b) von Brüchen in ganze Zahlen, c) von Brüchen in Brüche.

2. Addieren und Subtrahieren von Brüchen ohne Verwandlung, mit Verwandlung, und zwar hauptsächlich Verwandlung b beim Addieren, Verwandlung a beim Subtrahieren, Verwandlung c bei beiden.

3. Multiplizieren: ein Faktor ist ein Bruch, beide Faktoren sind Brüche; dazu tritt Verwandlung b und c.

4. Dividieren: a) es kommen ganze Zahlen in Betracht, nur der Quotient ist ein Bruch, z. B. $5:8 = {}^5/_8$[1]);

b) der Dividend ist ein Bruch, z. B. $^3/_5 : 2 = {}^3/_{10}$;

c) der Divisor ist ein Bruch, z. B. $7 : {}^2/_3 = {}^{21}/_2 = 10^1/_2$;

d) beides sind Brüche, dazu treten die verschiedenen Verwandlungen; z. B. $^3/_4 : {}^2/_5 = {}^{15}/_8 = 1^7/_8$[2]).

---

[1]) Um die Deutlichkeit und Leichtigkeit des Lesens in diesem Buche nicht zu beeinträchtigen, mußten wir uns damit abfinden, daß die Brüche mit schrägem Bruchstriche gesetzt wurden. Für den Schulgebrauch würden wir das nicht empfehlen, sondern darauf halten, daß die Schüler von Anfang an den wagrechten Bruchstrich gebrauchen, und zwar mindestens bis zum Erwerb des Bruchsatzes.

[2]) Die größere Ausdehnung der Divisionsübungen wird erklärlich, wenn man sich vergegenwärtigt, daß ja eigentlich jeder Bruch eine unausgeführte Division ist. Wie die Reihenzahl (und die Zahlenreihe) in wechselseitiger Abhängigkeit steht zur Addition und Subtraktion, die Systemzahl (und das Zahlensystem) in solcher wechselseitigen Abhängigkeit zur Multiplikation, so die Bruchzahl zur Division. In diesem Lichte erscheint die erste der unter 4 genannten Übungen als eine Division, die nicht aufgeht; die zweite als die Division einer Division, denn $^3/_5$ ist selbst eine Division, die Teilung durch 2 eine nochmalige; die dritte als die Division mittels einer Division: daß 7 geteilt werden soll, ist eine Division, aber der

Das Vorstehende ist ein Überblick über die in Betracht kommenden Teilziele. Man darf es nicht eine stoffliche Übersicht nennen. Unter Stoff versteht man gemeinhin ein Wissen, hier aber handelt es sich um ein immer höher abstrahierendes Können. Viel näher verwandt als mit „Stoffen" sind diese Übungen mit Arbeits- und Erwerbsmethoden, die der Lehrer natürlich auch in der Übersicht beherrschen muß[1]).

Es wäre nun freilich nicht richtig, die Reihenfolge der vorstehenden systematischen Übersicht nun auch der methodischen Behandlung zugrunde legen zu wollen. Allzuweit liegt dieser Gedanke allerdings nicht. Denn in jener Übersicht ist ein Aufsteigen zu größeren Schwierigkeiten ganz unverkennbar. Gleichwohl muß aus psychologischen Gründen davon abgesehen werden. Um dies zu verstehen, braucht man sich die Sache nur einmal plastisch, in Beispielen vorzustellen. Falls also die Reihenfolge der Übersicht gleichzeitig als Reihenfolge der methodischen Übungen zu gelten hätte, würde man zunächst zu üben haben, ganze Zahlen in alle möglichen Brüche zu verwandeln, also 2, 3, 5, 8, 11 usw. in Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel, Siebentel usf. Darnach erschiene die umgekehrte Übungsform: Halbe, Sechstel, Neuntel usw. in ganze oder gemischte Zahlen zu verwandeln. Es kann nun nicht bezweifelt werden, daß auf diesem Wege Abstraktionen sich erwerben lassen, aber doch nur von solchen, die einerseits im räumlichen Vorstellen, andrerseits im eigenen Erarbeiten der Abstraktionen schon sehr geübt sind. Und selbst bei ihnen wäre es der Weg des Systems, der zu mechanischer Handhabung und zur Regel führt. Dazu kommt, daß der bisherige Rechenunterricht weder zu starkem räumlichen Vorstellen noch zum eigenen Erarbeiten der Abstraktionen angeleitet hat, sondern glaubte, sein Ziel erreicht zu haben, wenn eine gewisse Höhe der Mechanisierung erreicht war. Deshalb würde ein solch systematischer Betrieb für die große Mehrheit unserer Kinder in der Hauptsache die Wirkung haben, sie mit aufgenommenen Abstraktionen anzufüllen.

Vielmehr gelten auch hier in gleichem, wenn nicht in erhöhtem Maße die Anforderungen an das Lehrverfahren, die sich aus den Grundsätzen der Anschauung und Selbsttätigkeit, der vollen Anschauung und der Eigentätigkeit entwickeln lassen, und die in

Divisor ist selbst schon eine Divisionsaufgabe. Die vierte endlich verlangt die Division einer Division mittels einer Division. Man muß sich das klar machen, um die ganz bedeutenden Abstraktionsanforderungen zu sehen, welche in diesen Übungen enthalten sind, und denen unsere Kinder entsprechen sollen.

[1]) z. B. Berichterstattung veranlaßt durch die Kinderfragen, eigne Beobachtung, Experiment, eignes Eindringen in überliefertes Gut usw.; sodann Worteinprägung, zeichnerische Einprägung usf.; ferner die verschiedenen Darstellungsformen, die wieder etwas ganz anderes sind u. a. m.

bezug auf unser Gebiet verlangen, daß alles Rechnen zunächst an Dingen, dann an räumlichen Symbolen durchgeführt, danach an Dingen und räumlichen Symbolen vorgestellt werde, damit es zur erworbenen Abstraktion gelange; daß aber auch der vollendeten Abstraktion noch die Raumvorstellung helfend zur Seite stehe, daß die vollendete Abstraktion sich augenblicklich konkretisieren können solle.

Dieser Gedanke der dinglich-symbolisch-räumlichen Durchführung wie der darauf folgenden dinglich-symbolisch-räumlichen Vorstellung ist indes nicht zu verwirklichen dort, wo die kindliche Psyche überschüttet wird mit einer Vielzahl von Formen des neuen Zahlbegriffs, von denen sie nicht einzelne klare und deutliche Vorstellungen gewinnen kann, sondern die ihr gegenübertreten als eine im wesentlichen unterschiedslose Masse. Die methodische Behandlung der Bruchrechnung kann darum in ihrer Aufeinanderfolge nicht übereinstimmen mit den in unserer Übersicht genannten Übungen. Oder mit anderem schon bekannterem Ausdruck: sie wird nicht logischen Charakter haben dürfen, sondern psychologischen haben müssen.

Mit Rücksicht auf die wiederholt dargelegte Entwicklung empfiehlt es sich, die Übungen durchzunehmen in drei verschiedenen Stufen, der Stufe der Grundlegung, der Erweiterung und der Abstraktion.

Die erste Stufe, die Stufe der Grundlegung, übt die Operationen an solchen Bruchzahlen, die für das Leben eine so hervorragende Bedeutung haben[1]), daß sie schon in den Bereich der kindlichen Interessen getreten sind.

Welche sind das? Wenn wir noch die Voraussetzung machen, daß es Bruchzahlen sein sollen, die von jeder Hausmutter nicht nur genannt, sondern verwendet werden, so ist das Ergebnis geradezu verblüffend; denn dann sind es nämlich nur drei Brüche: Halbe, Viertel und allenfalls Zehntel. Man gehe sich die gesamte häusliche Wirtschaftsführung durch, die überhaupt in den Gesichtskreis der Kinder tritt. Ja, auch das gesamte Kleingeschäftsleben verwendet nur diese drei.

Man wird einwenden wollen, es kämen doch die Achtel noch dazu. Das ist aber nicht der Fall. In unserer Erfahrung ist uns die Bruchzahl Achtel nur zweimal entgegengetreten: ein Achtel Rotwein, wenn nämlich $^1/_4$ Liter zuviel schien — man sieht dem Falle seine Seltenheit gleich an; und dann der andere: ein Achtel Bier,

[1]) Es ist selbstverständlich auseinander zu halten: Bedeutung für das wirtschaftliche Leben und Bedeutung für die mathematische Bildung; hier ist zunächst das erstere gemeint.

d. h. ein Fäßchen von $^1/_8$ hl, wie es von kleinen Landbrauereien hier und da noch ins Haus geliefert wird. Außerdem kommt noch der Ausdruck halbes Viertel vor, er wird aber mit dem wachsenden Wohlstand der Bevölkerung und mit der fortschreitenden Durchführung des metrischen Systems immer seltener. Auch ärmere Leute kaufen heute ein Viertelpfund Kaffee und schicken die Kinder nicht um ein halbes Viertel, und die halbe Viertelelle ist auch schon so gut wie ganz ausgestorben. Dazu kommt, daß eine Mehrzahl dieses halben Viertels, etwa drei halbe Viertel, überhaupt nie gebräuchlich gewesen ist, wohl aber die Form anderthalbes Viertel. Den Bruch $^3/_8$ aber kennen der Mann und die Frau des Volkes nicht aus ihrer Wirtschaftsführung (von besonderer beruflicher Tätigkeit, die dazu führen könnte, abgesehen), sondern nur aus der Schule. Das zeigt, daß es dem Volke Schwierigkeiten bereitete, kleinere Teile als Viertel sich vorzustellen.

Auch der weitere Hinweis auf Drittel, Sechstel, Zwölftel stimmt nicht. Man suche im Wirtschaftsleben des Volkes eine einzige Maßbezeichnung, die auf Drittel usw. lautete. Im Munde des Volkes kommen Drittel nur an zwei Stellen vor: ich bin mit dieser Arbeit zu einem Drittel, zu zwei Drittel fertig — und dann bei $33^1/_3$ % und ähnlichen Angaben.

Dagegen ist im Laufe der Jahre als Ergebnis unserer metrischen Maße und der fortschreitenden Rechnung mit Dezimalzahlen noch das Zehntel hinzugetreten, hauptsächlich infolge der Gewohnheit des Biertrinkens als Zehntelliter. Außerdem beginnt langsam das Zehntel-Pfund und das Zehntel-Kilo sich einzubürgern, vor allem im Kleinverkauf von Lebensmitteln, wo es dem Händler eine viel bequemere Berechnungsmöglichkeit bietet[1]). Auch hier erscheinen die Formen anderthalb Zehntel, drei und ein halb Zehntel beachtenswert. Mit drei Brüchen also kommt das Volk aus. Alles, was darüber hinausgeht, gehört dem besonderen Berufe an. Sollte das nicht auch pädagogisch-unterrichtlich zu denken geben[2])!

An diesen gut bekannten oder ziemlich bekannten, jedenfalls im wirtschaftlichen Gebrauch befindlichen Brüchen muß nun das Schwimmen in der Bruchrechnung erst erlernt werden. Die Stufe der Grundlegung arbeitet also zunächst nur mit diesen drei Brüchen.

---

[1]) Man beobachte und frage Fleischerfrauen und Ladenmädchen.

[2]) Bei diesem Gedanken stehen mir unter anderem zwei Mädchen unserer Schule vor der Seele, gute, liebe Kinder. Wir hoffen, daß sie einst brave Hausfrauen werden. Aber ich kann den Gedanken nicht los werden, daß sie nur dann, wenn sie etwa in einen Beruf einmünden sollten, der besondere Rechenausübung mit sich bringt (Verkäuferin, Bäckerfrau), in ihrer Bruchrechnung über Halbe, Viertel und Zehntel hinauskommen werden. Und sie werden jedenfalls damit durchkommen.

Nunmehr wird unsere Übersicht uns gute Dienste leisten. Wir wollen uns nach ihr richten bei der folgenden Darstellung der Übungen.

1. Ganze in Halbe, Viertel und Zehntel zu verwandeln, das heißt hier: das Zerteilen von Äpfeln und anderen Früchten, von Kartoffeln, Radieschen, Semmeln usw. wird nach Bedarf wirklich vorgenommen. Auf das Papierfalten als symbolische Bruchdarstellung seitens der Kinder ist schon hingewiesen worden. Das vorstellende Verwandeln wird nun viel geübt werden, und zwar nicht bloß an diesen Dingen, sondern auch an anderen, an Kuchen, Apfelsinen, Broten, sehr bald aber auch an allen in Betracht kommenden Maßbezeichnungen: Mark, Dutzend, Schock, Pfund, Kilogramm, Zentner, Zentimeter, Meter, Kilometer, Liter, Hektoliter, an Stunden, Tagen, Monaten und Jahren.

Dazu tritt das Rückverwandeln von Halben, Vierteln und Zehnteln in Ganze, womit die Gewöhnung an die gemischte Zahl verbunden ist. Das Verwandeln von Bruch in Bruch erscheint auf dieser ersten Stufe als Verwandeln von Halben in Viertel und von Halben in Zehntel und umgekehrt. Außerdem empfiehlt es sich, die Viertel mit den Zehnteln vergleichen zu lassen, wie wir das schon bei der Einführung in die Bruchzahl angedeutet haben.

2. kommt in Frage das Addieren und Subtrahieren von Halben, Vierteln und Zehnteln in echten und unechten Bruch- und gemischten Zahlen. Wenn man auch im Anfange einerseits Halbe und Viertel, andrerseits Halbe und Zehntel zusammenstellen wird, so bildet doch bald das Addieren von Vierteln und Zehnteln den Kindern dieser Stufe Probleme, die sich von ihnen auf mehrfache Art lösen lassen, und zwar ohne Hilfegeben des Lehrers. Man sieht, das macht nicht besondere Schwierigkeiten und stellt doch immerhin gewisse Anforderungen.

3. Multiplikation. Hierher gehört zunächst alles Malnehmen in dem Sinne, daß Halbe, Viertel und Zehntel als Multiplikanden auftreten, die eine bestimmte Anzahl (also mit einer ganzen Zahl) „mal zu nehmen" sind; z. B. $\frac{1}{2}$ ℔ Brot für jedes von 15 Kindern! Oder $\frac{3}{4}$ ℔ $\cdot 3 = {}^{9}/_{4}$ ℔, mit entsprechender Verwandlung: $= 2$ und $\frac{1}{4}$ ℔[1]). Und da wir gewöhnt sind, die Multiplikation mit dem Enthaltensein zusammen zu üben, so schließt sich daran an: Wievielmal kann ich $\frac{1}{4}$ ℔ von 2 ℔ wegnehmen? Wie oft ist $\frac{3}{4}$ ℔ in 6 ℔ enthalten? Wie oft in $3^{3}/_{4}$ ℔?

Ferner gehört hierher das ganze Gebiet der Verwandlungen[2]), insofern sie der Form nach Multiplikationen, wenn auch schon ihrem

---

[1]) Wir empfehlen, die gemischte Zahl immer mit „und" aussprechen zu lassen. Um daran zu erinnern, ist das „und" wiederholt ausgeschrieben worden.

[2]) Eigentlich auch der unter 1 genannten, die aber aus begreiflichen Gründen vorweggenommen werden müssen.

Sinne nach Divisionen sind; aber jenes muß berücksichtigt werden. Z. B. 1/2 Dtzd. Taschentücher sind 6 Stück, 1/2 Schock Eier sind 30 Stück, 1/2 ℳ sind 50 ₰, 1/4 Ztr. Zucker sind 25 ℔, 1/2 m Band sind 50 cm, 1/4 Jahr sind 3 Monate, 3/4 Jahr sind 9 Monate, 3/4 Stunde sind 45 Minuten, 1/2 Tag sind 12 Stunden, 7/10 ℳ sind 70 ₰, 3/10 hl Bier sind 30 l, 1/4 kg Butter sind 250 g, 3/4 ℔ Fleisch sind 375 g, 1 1/10 ℔ Wurst sind 550 g, 4/10 ℔ Schweizerkäse sind 200 g, 3/4 km Weg sind 750 m ... alles Mögliche mit den Brüchen 1/2, 1/4, 3/4, 1/10 bis 9/10. Auch hieran schließt sich die Umkehrung: 60 ₰ sind 6/10 ℳ usf.

Weiter wird ausgebaut, was schon in einem Beispiel angedeutet wurde:

2 1/4 Schock Eier sind 120 + 15 = 135 Stück
3 3/4 „ „ „ 180 + 45 = 225 „ usw.,

d. h. alles das auch mit reichlicher Übung in gemischten Zahlen. Dazu tritt die Umkehrung: 15 Monate sind 1 und 1/4 Jahr usw.

Es sind ferner dem Sinne nach dieselben Aufgaben, wenn wir rechnen, was 1/2 l Milch kostet, was 1/4 Ztr. Äpfel, 1/4 Dtzd. Kragen, 1/4 l Sahne, 1/4 kg Schokolade usf.

Ebenfalls hierher gehört die höchst wichtige Gruppe von Aufgaben wie: 1 ℔ Kalbfleisch kostet 90 ₰, rechne 1/2, 3/4 ℔! Der Fleischer rechnet nach Zehnteln, macht es ihm nach! 3/10 ℔ kosten 27 ₰ — rasch dazwischen: Ob das vorkommt? Ja, wenn jemand 1/4 ℔ Kotelettenstück haben will, und es ist ein bißchen größer, da sagt er: darf es etwas mehr sein? und da gucke ich auf die Wage. Wenn's 150 g sind, 3/10, dann darf es 27 ₰ kosten.

Macht selbst solche Aufgaben! Ich hole 3/4 ℔ Rindfleisch, das ℔ zu 90 ₰. Er sagt: es ist etwas mehr. Wenn es 400 g sind, dann sind es 8/10, dann darf es 72 ₰ kosten. Wenn ich 1/2 ℔ hole und es ist etwas mehr, vielleich 270 g, dann ist es noch kein halbes Zehntel mehr, dafür darf er mir höchstens 4 ₰ abnehmen, also zusammen 49 ₰.

1 ℔ Reis kostet 38 ₰; rechnet 3/4 ℔! 1/4 ℔ kostet 9 und 1/2 ₰, 3/4 ℔ kosten 27 3/2 = 28 1/2 ₰; da muß ich natürlich 29 ₰ zahlen. Da ist es besser, wir nehmen 1 ganzes Pfund ... Oder 5 ℔, fügt ein Kind hinzu, bei 5 ℔ kostet derselbe Reis bloß 36 ₰. Da hätten wir an jedem Pfund noch 2 ₰ gespart, zusammen 10 ₰.

Diese Übung verlangt also, die genannten Brüche mit den verschiedensten Zahlen des ersten Hunderters, und gegebenenfalls auch größeren, zu multiplizieren. Die Multiplikation Bruch mal Bruch hier zu bringen — man vergleiche die Übersicht — hat keinen Zweck; 1/2 · 1/4 würde eben ein halbes Viertel, 1/2 · 1/10 ein halbes Zehntel ergeben. Aber das Wesen dieser Stufe besteht gerade

darin, zunächst einmal innerhalb der Halben, Viertel und Zehntel mit allen Operationen heimisch zu werden.

4. Zu ähnlichen Ergebnissen gelangen wir, wenn wir die Division in unserer Übersicht betrachten. Da sollen einmal unsere Brüche nur als Quotient erscheinen, z. B. 3 Äpfel verteilt unter 6 Kinder! Da bekommt jedes $1/2$ Apfel. 2 Stückchen Kuchen unter 8 Kinder! Da erhält jedes $1/4$ Stück (nicht etwa als $2/8$ aufzufassen, sondern so, daß je 4 Kinder sich in eins zu teilen haben). Man sieht sofort, Übungen von dieser Form bieten eine gewisse Schwierigkeit der Aufgabenbildung, während die Lösung verhältnismäßig leicht ist. In solchem Falle ist nichts einfacher, als diese Schwierigkeit den Kindern zuzuweisen: Macht Verteilungsaufgaben, daß jedes $1/4$ bekommt, daß jedes $2/10$ bekommt, $3/4$ usw.

Bei weiterem Fortschreiten auf diesem Wege werden damit die Geweckteren ganz allein die nächste Form finden, daß auch der Dividend ein Bruch sein kann. Sie werden ohne Mühe die beiden Aufgaben bilden: $1/2$ Apfel geteilt unter 2 Kinder, ist $1/4$; und $1/2 : 5 = 1/10$. Daneben erscheinen vielleicht die Formen: $2/4 : 2 = 1/4$; $3/4 : 3 = 1/4$; $7/10 : 7 = 1/10$; $6/10 : 2 = 3/10$ usf. Sie bedürfen keiner besonderen Hervorhebung. Darüber hinauszugehen, sei der nächsten Stufe vorbehalten.

Der Blick auf unsere Übersicht wie auf die bisherigen Übungen zeigt ferner, daß der Bruch als Divisor schon durchgenommen worden ist im Enthaltensein, und daß Bruch durch Bruch erst später erscheinen kann.

So zeigt es sich, daß die erste grundlegende Stufe der Bruchrechnung, die sich nur mit Halben, Vierteln und Zehnteln beschäftigt, in der Hauptsache die Verwandlung pflegt; und daß ein höchst geeignetes Gebiet für diese Übungen das der häuslichen Wirtschaftsführung ist. Es können dann leicht viele der freudelosen, weil unzweckmäßigen Aufgaben entbehrt werden, wie sie hin und wieder noch die Rechenbücher füllen, z. B. Verwandle 9; 15; 18; 22; 25; 32; 36; 45; 58; 72; 75; 96 m (l, Dtzd., Grs.), in Viertelmeter, (-liter, -dutzend, -gros).

Da es auf allen Stufen durchaus notwendig ist, daß die Kinder selbst Aufgaben bilden, so ist es dem Lehrer, der rasch und doch nicht überflüssig helfen will, vielleicht lieb, folgende kleine Übersicht bei der Hand zu haben. Auch empfiehlt es sich, sie von den Kindern selbst nach und nach erarbeiten, vermehren und in irgendeiner Weise aufzeichnen zu lassen. Die heute üblichen Wandanstriche bieten dafür treffliche Gelegenheit.

Wir berechnen
nach Kilogramm und Pfund: Brot, Butter, Käse, Kaffee, Kakao, Mehl, Mandeln, Rosinen, Fleisch, Wurst, alle trocknen und die meisten grünen Gemüse, ferner Seife, Leder, Bindfaden, Nägel, Papier usw., man kann etwa sagen: alle Genuß- und Verbrauchsgegenstände —
auch nach Zentnern: Mehl, Kartoffeln, Reis, Zucker, Obst usw.[1]);
nur nach Zentnern: Steinkohlen, Braunkohlen, Preßkohlen, Hafer, Roggen, Gerste usw. Teilweise und für den Großhandel ausschließlich kommt das Gewicht der Tonne in Betracht —
nach Dutzenden: Handtücher, Taschentücher, Kragen, Strümpfe, Schürzen, Knöpfe usw. Fast das ganze Gebiet fertiger und halbfertiger Kleidung und Wäsche rechnet so. Ferner Apfelsinen, Schreibhefte, Bleistifte, Löffel, Messer und Gabeln, Stühle usf. —
nach Gros: Knöpfe, Stahlfedern, Reißzwecken —
nach Schock und Mandeln[2]): Eier, Nüsse, Christbäume, teilweise auch noch Käse (z. B. Harzer), nach Mandeln auch noch Heringe —
nach Tausenden: Zigarren, Torf, Ziegelsteine, Nägel, Papier —
nach Litern (l): Milch, Bier, Wein, Spiritus, Petroleum —
nach Hektolitern (hl): Bier, Wein, Koks —
nach Kubikmetern (cbm): Wasser, Gas, Holz, Bausand, Gartenkies —
nach Metern (m): alle Webstoffe, wollene und baumwollene, leinene und seidene, die nicht abgezählt, sondern vom Stücke geschnitten werden: Hemdentuch, Bettzeug, Kleiderstoffe, Band —
nach Kilometern (km): Eisenbahnen, Wegelängen, Luftlinien —
nach Quadratmetern (qm): Bauplätze, Straßen, Wandanstriche, das in Brettern geschnittene Nutzholz (z. B. beim Tischler) —
nach Tagen und Stunden: Arbeitsleistungen, bei Menschen Arbeitsstunden, bei Wasser und Dampf Pferdekraftstunden, bei Elektrizität Kilowattstunden usw.

Die zweite Stufe der Bruchrechnung, die Stufe der Erweiterung, sucht nun, nachdem die Übungen mit den bekannten

[1]) Hier ist natürlich die private häusliche Wirtschaftsführung gemeint, und was in ihr vorkommt, nicht der Großhandel; der Kleinhandel dagegen kommt jener oft recht nahe.

[2]) Es sei bemerkt, daß die Berechnung Schock und Dutzend im Leben nirgends vorkommt, nur in der Schule.

Bruchzahlen bis zu einer gewissen Sicherheit gediehen sind, den Fortschritt dadurch zu gewinnen, daß sie die geläufig gewordenen Übungen überträgt auf eine Reihe weniger gebräuchlicher Bruchzahlen, mit denen aber sich doch noch leicht umgehen läßt, weil sie Beziehungen enthalten, die zu den bekanntesten gehören. Demzufolge fügen wir zu den Halben und Vierteln die Achtel, zu den Zehnteln die Fünftel und Zwanzigtel und nehmen endlich noch die Gruppe der Drittel, Sechstel und Zwölftel hinzu, also zu den drei bekannten Bruchzahlen sechs neue.

Das Verständnis für sie zu erzeugen ist ganz leicht, zumal mit Benutzung des Papierfaltens. Auch die verschiedenen Formen der Verwandlung begegnen mit der gleichen Hilfe nur geringen Schwierigkeiten und bedürfen nur der Übung, um nach und nach mit immer geringerem Energieaufwand zur Verfügung zu stehen. Von ihnen kann nun die dritte, die Verwandlung von Bruch in Bruch, mehr herangezogen werden: Hälbe in Viertel, Sechstel, Achtel, Zehntel, Zwölftel, Zwanzigtel; Drittel in Sechstel, Zwölftel; Viertel in Achtel, Zwölftel, Zwanzigtel; Fünftel in Zehntel und Zwanzigtel; Sechstel in Zwölftel, Zehntel in Zwanzigtel — und all dies auch umgekehrt, und all dies auch in unechten Brüchen. Das bedeutet nun nichts mehr und nichts weniger, als daß hier das gesamte Kürzen und Erweitern in anschaulicher Darstellung und zuletzt noch in anschaulich-räumlicher Vorstellung durchgenommen wird — allerdings ohne Regeln und ohne jeden Mechanismus.

Die Hauptschwierigkeit dieser Stufe ist das rechte Aufgabenbilden, weil nämlich nur wenige der in Betracht kommenden Aufgaben so lebenswahr gestaltet werden können, wie wir es wünschen, da eben das Wirtschaftsleben sich nicht dieser Brüche bedient. In den seltenen Fällen, wo dies geschieht — man erhält z. B. von einer Fabrik zur Probe „$^1/_{12}$ Dutzend" — da wirkt es belustigend oder befremdend. Es fällt uns also zunächst die Aufgabe zu, lebenswahre Fälle heranzuziehen. Dafür kommen in Betracht solche, wo eine sachliche Einheit, nicht die Einheit einer höheren Maßzahl, geteilt wird:

5 Leute spielen zusammen ein Los, jeder $^1/_5$; 6 Schüler teilen sich ein Brot, jeder erhält $^1/_6$; 8 Kinder bekommen eine Tafel Schokolade, 3 einen Käse; 8 Soldaten ein Stück Butter; auf 3 von ihnen kommt 1 ℔ Fleisch; 3 Hausfrauen teilen sich in 1 Kürbis, in 1 Schock Eier, in 2 Ztr. Weißkraut, in 10 Ztr. Kartoffeln usw. Man sieht, lebenswahr sind nur Teilungen im kleinsten Kreise, schon bei 6 hat man den Eindruck der gleichartigen Herde. Dieser Gedanke erweckt sofort die Aufgabe: 20 Schafe erhalten 1 ℔ Salz;

wieviel kommt auf jedes? Dies Beispiel aber zeigt, wie nahe man der Grenze der Lebenswahrheit steht.

Mit der geringen Zahl dieser und ähnlicher Beispiele ist natürlich das Ziel: beizutragen zur Beherrschung des Bruchrechnens — nicht zu erreichen. In solchem Notfalle muß es daher gestattet sein, auch zu solchen Ersatzmitteln zu greifen, die wir sonst vermeiden. So kommen wir dazu, **Phantasieaufgaben** zu Hilfe zu nehmen, Zahlenaufgaben, denen keine Wirklichkeit entspricht. Es ist von vornherein klar, daß sie an eine **erträgliche und wirksame Behandlung** wesentlich höhere Anforderungen stellen.

Hier werden uns zunächst die Wohlgesinnten, Reformer wie Altmethodiker, in den Arm fallen wollen: „Nicht doch, Phantasieaufgaben! Wir alle wollen von ihnen los, wir wollen dem Leben dienen und nicht der Schule, und eine Reformschrift darf sie vielleicht dulden, aber nicht verteidigen wollen!" Aber wir können ihnen nicht ganz recht geben, aus zwei Gründen, einem Erfahrungsgrund und einem idealen. Zunächst jener: Die vor uns liegenden Rechenbücher bestehen — manche fast ganz, die anderen zum größten Teile — aus solchen Phantasieaufgaben. Nun liegt es uns fern, die Verfasser deswegen zu schelten; wo nichts ist, kann auch der beste Wille nichts finden. An dieser Stelle aber, sagt ihnen ihr pädagogisches Gefühl, müsse etwas gefunden werden, und wenn es auch nur Zahlenturnen wäre in unwahrscheinlicher Einkleidung. Und wir stimmen ihnen bei um der Übungsmöglichkeit willen, die den jeweiligen Energieaufwand nach und nach erniedrigt. Dafür suchen wir den Gewinn anderswo, nämlich in der Art der Ausführung. Ehe aber davon die Rede sein soll, erst den andern Grund, den idealen. Wohl gilt: Non scholae sed vitae discendum, aber das hat hier nicht den Sinn, als dürften wir nunmehr lediglich hauswirtschaftliche Aufgaben bringen. Wir dienen dem Leben gerade dadurch, daß wir uns frei machen von der Art der Normalverfahren und der fortwährenden Einübung des angeblich „für das Leben Wichtigsten". Unser ganzes Buch will doch weiter nichts, als den künftigen Rechenunterricht dadurch dem Leben besser dienstbar zu machen, daß wir statt der Abrichterei, der Dressur **mathematische Bildung** vermitteln. Diese läßt sich nicht ohne Assoziationsgeläufigkeit der elementaren Beziehungen erreichen, und dafür haben wir im Zahlenturnen ein wichtiges Hilfsmittel. Zusammenfassend dürfen wir also sagen: Während das bisherige Bruchrechnen in den Übungen mit der reinen Zahl und mit unwirklichen Einkleidungen so gut wie gänzlich aufging, wollen wir als Hauptgebiet die wirklichen Verhältnisse und Notwendigkeiten des Lebens heranziehen; nicht in der Absicht, daß die Kinder möglichst jede „gehabt haben", sondern in der, sie zu rechter gefühlsbetonter

Auffassung ihrer Lebenssphäre gelangen zu lassen. Dabei wollen wir nicht auf die anderen Übungen verzichten. Während diese aber früher fast die alleinige Herrschaft hatten und dabei doch noch gegenstandslos in der Luft hingen, wollen wir sie lediglich als ein von Fall zu Fall in Betracht kommendes Hilfsmittel heranziehen und hoffen, daß sie auf jener Grundlage der Wirklichkeit durch ihre besondere Auswahl und durch die besondere Behandlung, die sie erfahren, beitragen werden zu mathematischer Bildung.

Nun zur Art der Ausführung. Wir wünschten sie **erträglich und wirksam**. Beides wird erreicht werden, wenn die **Kinder die Aufgaben bilden lernen**, und zwar mit dem öfters zu klärenden Bewußtsein: Solche Aufgaben gibt es sonst nicht; wir wollen spaßeshalber solche machen, man kann auch an solchen Aufgaben fein rechnen lernen. Nach zwei Richtungen geht die erfinderische Gestaltung solcher Aufgaben: Wieviel Gramm hat $\frac{1}{3}$ ℔? und: Wieviel kostet $\frac{1}{3}$ ℔, wenn das ganze 70 ₰ kostet. Also nach der Richtung der Umwandlung der Einheiten und nach der der Preisberechnung.

Gelegentlich kann zu allgemeiner Freude und unter großem Interesse der Kinder der Vergleich mit der Wirklichkeit gezogen und festgestellt werden, daß es $\frac{1}{3}$ ℔ gar nicht gibt; daß also niemals nachgewogen werden kann mit unseren Gewichten, ob man beim Fleischer für 30 ₰ seine richtige Ware bekommen hat, wenn das Pfund 90 ₰ kostete, höchstens angenähert; und die Kinder bekommen den ersten Begriff von mathematischer Annäherung.

Erträglich und wirksam werden solche Phantasieaufgaben ferner dadurch, daß wir ihnen einen **mathematischen Sinn** abzugewinnen suchen. Ein Gebiet ist hier besonders fruchtbar. Wir können es an allen den vorhin genannten Beispielen sehen. Bei den 6 Schülern kann fortgefahren werden: Wieviel bekommt jeder durchschnittlich? Für wieviel Geld hat jeder durchschnittlich gebraucht? und ähnlich bei den meisten der anderen Beispiele. Damit ziehen wir das so wichtige Durchschnittsrechnen heran[1]), das zwar in erster Linie theoretisches Interesse hat, das des quantitativen Vergleichs, dann aber bedeutsame praktische Folgerungen ziehen kann. Z. B., um bei einer schon angeführten Aufgabe zu bleiben: $\frac{1}{3}$ ℔ Fleisch täglich = $166\frac{2}{3}$ g; das gibt im Jahre mehr denn 120 ℔ oder 60 kg. Wer so viel ißt, steht weit über dem englischen Durchschnitt (47 kg) und noch mehr über dem italienischen (12 kg), und steht zugleich vor der Frage, ob das gesund und wirtschaftlich ist.

[1]) Später, in dem Abschnitt „Bürgerliche Rechnungsarten", wird noch näher darauf eingegangen werden.

Wir fassen zusammen. Die wichtigste Schwierigkeit dieser Stufe besteht darin, daß wir Operationsübungen mit Brüchen, die im gewöhnlichen Leben so gut wie nicht vorkommen, dennoch zu beleben suchen, und zwar durch die kindliche Selbsttätigkeit und sodann dadurch, daß wir gelegentlich den höheren mathematischen Zweck herausleuchten lassen. Dies wird uns behüten vor der Beschränkung auf formale Übungen, die in unwahrer Weise mit einem sachlichen Mäntelchen umgeben werden[1]).

Nunmehr können wir unsere Übersicht rasch überblicken. Das Addieren und Subtrahieren der nun in Betracht kommenden 9 Brüche geht ohne Verwandlung, d. h. bei gleichnamigen, ganz von selbst; mit Verwandlung, bei ungleichnamigen also, erscheint es als interessantes Problem, das sich auf verschiedene Art lösen läßt, nämlich von den Kindern allein[2]).

Auch die Multiplikation — $^1/_3 \cdot 7$; $^2/_5 \cdot 6$; $^3/_8 \cdot 10$ — bietet keine Schwierigkeiten, solange der Bruch Multiplikand ist. Auch die Konkretisierung ist nicht allzu schwer. Als Multiplikator aber — $12 \cdot {}^2/_5$ in dem Sinne, die 12 solle $^2/_5$ mal genommen werden — stellt er uns vor die Aufgabe, die Kinder nach und nach zu der vertieften Auffassung zu führen, daß das eigentlich in der Hauptsache eine Division ist, wie das ja auch die Stammbrüche zeigen, und daß erst gewissermaßen an zweiter Stelle eine Multiplikation hinzutritt. Ein Teilziel auf diesem Wege ist erreicht, wenn die Kinder verstehen, daß $12 \cdot {}^2/_5$ (in dem Sinne wie vorhin) dasselbe meint, wie $^2/_5$ von 12. Daß hier alle die Reihen der schon angeführten Beispiele in Betracht kommen, braucht nur angedeutet zu werden.

Ebenso bedarf es nur des Hinweises, daß mit allen Multiplikationsübungen immer die Übungen im Enthaltensein zu verbinden sind; sei es, daß die einzelnen Übungen sofort mit dem Bilde ihrer Umkehrung ausgestattet werden, sei es, daß man erst eine Reihe von Multiplikationsübungen durchnimmt, um darauf eine passende Reihe von Enthaltenseinsübungen folgen zu lassen. Als Beispiel für jenen Fall diene: 7 Kinder haben jedes $^1/_3$ Apfel bekommen; rechnet! Da hatten wir 2 und $^1/_3$ Apfel zu verteilen. Rechne vor! $^1/_3 \cdot 7 = {}^7/_3 = 2^1/_3$. Wenn nun einer mehr da ist? Dann können 10 Kinder $^1/_3$ Apfel bekommen. Rechne vor! $3^1/_3 = {}^{10}/_3$; $^1/_3$ in $^{10}/_3$ geht 10 mal. Rechnet für 13 Kinder aus! usw.

Die Multiplikation Bruch mal Bruch heben wir uns für die 3. Stufe auf; vorbereiten können wir sie aber recht gut durch die Form: $^1/_4$ von $^1/_3$.

[1]) Wie z. B.: Verwandle $^1/_4$; $^5/_{12}$; $^1/_6$; $^5/_6$; $^1/_{12}$; $^5/_{12}$; $^7/_{12}$ a) Tage in Stunden; b) Std. in Min.; c) Schock in Stück; d) Dtz. in Stück; e) Gros in Stück.

[2]) Vergl. hierzu auch die Ausführungen der Besprechung der 3. Stufe.

Bei den Divisionsübungen werden nunmehr die Fälle, wo nur der Quotient als Bruch erscheint, dazu dienen, das Wesen des Bruches schon mehr zu klären, z. B. $2:5 = {}^2/_5$; $3:8 = {}^3/_8$; $9:12 = {}^9/_{12}$ usw. Auch hier kann das Aufgabenbilden so vorgenommen werden, daß das Ergebnis im voraus festliegt.

Die Fälle, daß ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert wird, sind auch jetzt noch nicht besonders zahlreich. Folgende kommen in Betracht: ${}^1/_2$, ${}^1/_4$, ${}^3/_4$, ${}^1/_8$, ${}^3/_8$, ${}^1/_6$ bis ${}^5/_6$, ${}^1/_5$ bis ${}^4/_5$, ${}^1/_{10}$ bis ${}^9/_{10}:2$; ${}^1/_2$, ${}^1/_4:3$; ${}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^2/_3$, ${}^1/_5$, ${}^2/_5$, ${}^3/_5:4$; ${}^1/_4$, ${}^3/_4:5$; ${}^1/_2:6$, 10. Dabei bilden noch solche wie ${}^2/_6:2$, ${}^4/_5:2$, ${}^9/_{10}:3$, ${}^9/_{20}:3$ usw. eine Gruppe für sich, da sie im Grunde nichts Neues bieten gegenüber der Division mit ganzen Zahlen, sondern eigentlich nur die Benennung gewechselt haben. Aber auch die anderen machen wenig Schwierigkeiten, denn da das Verwandeln der Brüche ineinander (Kürzen und Erweitern) auf dieser Stufe fleißig geübt wird, so muß man, wenn man beispielsweise ${}^1/_5:2$ teilen will, es erst in ${}^2/_{10}$ verwandeln; aus ${}^3/_{10}$ muß man bei dieser Teilung ${}^6/_{20}$ machen, dann geht es; ebenso ${}^1/_4:3 = {}^3/_{12}:3 = {}^1/_{12}$ usw. Damit dürfte das Gebiet der 2. Stufe genügend umschrieben sein.

Die 3. Stufe haben wir als Stufe der Abstraktion bezeichnet, allerdings nicht in dem üblichen Sinne der Formalstufen oder einer sonstigen Lektionsmethodik. Wir haben vielmehr damit sagen wollen, daß die beiden vorhergehenden Stufen, die der Grundlegung und der Erweiterung, von der Abstraktion in der Hauptsache zu entlasten seien, weil es ihre Aufgabe ist, vor allem erst einmal mit gebrochenen Dingen und gebrochenen Maßen zu arbeiten, wirklich hantierend, sehend und vorstellend. Dieser 3. Stufe aber weisen wir im allgemeinen die in Betracht kommenden Abstraktionen zu.

Hierbei könnte die Frage gestellt werden, ob denn die volle Abstraktion erzielt werden solle. Oder vielleicht genauer, da wir doch mathematische Bildung betonten: ob in der Volksschule etwa auch die volle Abstraktion Ziel werden solle wie in der höheren Schule. Wir antworten darauf mit den Ergebnissen der Psychologie: Ins Auge fassen dürfen wir die Abstraktion auch für die Volksschüler, aber nicht für alle. Wir haben schon genug solche kennen gelernt, die ihr gewachsen waren. Trotzdem war es eine Minderheit. Die große Mehrheit der Kinder — und die Psychologie schließt hier die Besucher höherer Lehranstalten nicht aus — ist bis zum 13. und 14. Jahre, auch noch darüber hinaus, der Abstraktion gar nicht in dem Maße zugänglich, als man gemeinhin glaubt. Dieser Irrtum ist ja verzeihlich. Einen geläufigen Mechanismus glaubt man als Verständnis ansehen zu dürfen, zumal wenn er

begleitet ist vom sicheren Hersagen der Definitionen und Rechenregeln. Diesem Irrtum gegenüber dringen wir mit Absicht darauf, sich zufrieden zu geben mit einem geringeren Grade von Abstraktion, dazu den Mechanismus aufzugeben, dafür aber einen anderen besser begründeten Mechanismus anzuknüpfen an die durch Konkretisieren gebundene Abstraktion.

In diesem Sinne würden wir es für durchaus zulässig ansehen, daß ein schwaches Kind im Bruchrechnen die Stufe der Grundlegung nicht überschreitet, oder vielleicht ein paar Jahre später dies tut, wenn es im Intelligenzalter den anderen nachgerückt ist. Und die mittleren Begabungen werden im allgemeinen auf der Stufe der Erweiterung so viel Abstraktionen vorfinden, daß sie nicht nur für die wirtschaftlichen Aufgaben des Lebens genügende Vorbereitung mitbringen, sondern daß sie sogar damit die ihrem Alter entsprechende mathematische Bildung sich erworben haben. Oder sollen wir annehmen, nach dem 6. Schuljahre, dem 12. Lebensjahre, in dem allgemein die Bruchrechnung als abgeschlossen betrachtet wird, lerne der Mensch nichts mehr, wenigstens in bezug auf mathematisches Verständnis der bis dahin betriebenen Übungen nicht? Das wäre ein Irrtum, den jedes Ladenmädchen widerlegen könnte. Mechanismus allerdings geht vielfach verloren, neben einem speziellen Mechanismus wird aber meist auch Bildung gewonnen.

Der mathematischen Bildung wegen stehen Aufgaben dieser Stufe der Abstraktion ja auch in unsern heutigen Rechenbüchern. Doch verwechseln die meisten von ihnen mathematische Bildung mit Mechanismus. Würden sie eine richtige Auffassung von der Sache haben, so würden sie diese Stufe nicht so oft als trocknes Stroh bieten, das von allen gekaut und verdaut werden muß, sondern als Zuckerbrot, das nur für diejenigen da ist, die das vorige beherrschen. Trotzdem wir nun zeigen konnten, daß mit der Stufe der Grundlegung das volkstümliche Wirtschaftsleben, mit der Stufe der Erweiterung sogar das volkstümliche Berufsleben im allgemeinen auskommt, so wird dennoch die Absicht des Erziehers dahin gehen, möglichst vielen, gegebenenfalls allen, auch die dritte und höchste Stufe zugänglich zu machen. Aber eine Forderung des Lehrplans, in dem allgemein verbindliche Unterrichtsziele niedergelegt wären, dürfte es nicht sein.

Wenden wir uns nunmehr den Einzelheiten dieser Stufe zu. Nachdem an 9 gebräuchlichen Bruchformen die einzelnen Operationen geübt sind, werden nun auch die übrigen Brüche mit herangezogen. Es ist klar, daß Dreißigtel, Vierzigtel, Fünfzehntel, Fünfundzwanzigtel, Siebentel und Neuntel öfter vorkommen werden

als beispielsweise Dreiundzwanzigtel, aber ausgeschlossen ist nunmehr keine Bruchzahl[1]).

Nun sind wir auch in der Lage, die sämtlichen Bruchgrößen miteinander zu vergleichen: Siebentel sind größer als Neuntel, ganz selbstverständlich, weil eben bei der „Teilung" mehr „Teilnehmer" „beteiligt" sind — wir müssen die volle Bedeutung dieser Wörter uns und den Kindern zum Bewußtsein bringen, um den mathematischen Sinn dieses Gedankens zu erfassen. Das gilt natürlich auch von $^3/_7$, $^3/_8$, $^3/_9$, $^3/_{10}$ usw. Das ununterbrochene Vergleichen, das wir auch sonst überall befürwortet haben, bewirkt hier — selbst ohne daß dies zunächst ausgesprochen zu werden braucht — die Abstraktion des abnehmenden Wertes der Bruchzahl bei wachsendem Nenner.

Dem Vergleichen gesellt sich das Verwandeln zu. Es ist ja eigentlich weiter nichts als die exakte Ausführung des Vergleichens. Und die beiden vorigen Stufen haben genügend vorgearbeitet. Daß Achtel und Neuntel erst in 72teln eine gemeinsame Verwandlungsform gewinnen, finden die Kinder, die vorher aus eigner Kraft Drittel und Viertel zusammengezählt haben, auch hier allein. Und daß man bei Achteln und Zwölfteln nicht auf 96tel zu gehen braucht, ist ihnen schon bei Vierteln und Sechsteln entgegengetreten: daß nämlich irgendeine Verwandtschaft der Zahlen die Verwandlung erleichtert. Daß beides geübt wird, ist eine Aufgabe dieser Stufe, freilich nicht so, daß beides so rasch als möglich mechanisiert wird, sondern so, daß beides eine ge-

[1]) Die Schreibung Dreißigtel usw. mag vielleicht überraschen. Die Sache liegt so. Von vier bis neunzehn ist es üblich, die Bruchzahl durch Anhängen der Silbe tel zu bilden, was die Sprachforschung allgemein als eine Verkürzung von Teil erklärt, wobei sie hinweist auf das Dritteil, vierteilen und viele mittelalterliche und neuere Belege. Von 20 an aber erscheint die übliche Bruchzahl in der Form der Ordnungszahl, nämlich mit st, also Zwanzigste, Zwanzigstel. Nun entsteht das Problem: Ist sprachgeschichtlich die Bruchzahl von der Grundzahl oder von der Ordnungszahl abzuleiten? Meinem Gefühl nach müßte das letztere der Fall sein, der Schreibung nach das erstere; denn nirgends erscheint ein tt, was doch vorhanden sein müßte, wenn die Ableitung von der Ordnungszahl in Betracht kommen sollte: Zwanzigst-tel. Germanisten, die ich hierüber befragte, konnten keine Auskunft geben und wiesen mit Recht darauf hin, daß die Sprachwissenschaft nicht normativ sei, sondern deskriptiv; daß also, selbst wenn das eine oder das andere der Fall wäre, trotzdem der Weg offen stünde, eine früher nicht übliche oder nicht belegte Sprachform zu gebrauchen, wenn sich besondere Gründe dafür zeigten. Weil mir nun das s in den Bruchzahlen von 20 an als eine Energieverschwendung erscheint, auch irgendwelche Pietät nicht in Frage kommt, so gestatte ich mir den Vorschlag, alle Bruchzahlen mit dem Grundzahlwert und der Abkürzung tel für Teil zu bilden, also Dreißigtel, Vierzigtel, Hundertel, Tausendel (in diesen beiden ohne die Doppelung des t); bei Milliontel habe ich es schon mehrfach gehört. Es gehört allerdings eine Umgewöhnung dazu, wer aber über genügend Selbstbeherrschung verfügt, dem ist sie nicht zu schwer, falls die Zweckmäßigkeit eingesehen wird.

wisse staunende Entdeckerfreude in sich birgt[1]). Hiermit sind selbstverständlich die gesamten Übungen im Erweitern und Kürzen verbunden. Beides soll nicht auseinandergerissen werden zum Zwecke systematischer und mechanischer Einprägung. Sondern in der gesamten Rechenpraxis besteht jederzeit die Absicht, einen Bruch so klein wie möglich auszudrücken, andrerseits doch aber auch die Notwendigkeit, ihn in größeren Zahlen darzustellen, wenn Addition, Subtraktion oder Division mit anderen Brüchen dies erheischt. Auch das Gleichnamigmachen gehört dazu; doch braucht nie davon gesprochen zu werden, wenigstens nicht in dem Sinne einer besonderen Schwierigkeit, noch viel weniger in dem einer Regel. Vom ersten Schuljahre an ist es dem Kinde klar, daß man Birnen und Pflaumen nicht ohne weiteres zusammenzählen kann, oder daß man, wenn man es dennoch tut, im Ergebnis von Früchten sprechen muß; und vom Anfang jeglicher Bruchrechnung an ist diesen so geführten Kindern klar, daß man ebensowenig Drittel und Fünftel addieren kann, wenn man nicht erst einen gemeinsamen Namen für beide gefunden hat.

Im Addieren und Subtrahieren bilden nach kurzer Zeit die Kinder selbständig Übungsaufgaben. Es geschieht leicht in der verwegensten Weise, will sagen in ganz ungebräuchlichen Nennern. Solange das die Kinder freut, braucht man nichts dagegen zu haben. Nur wenn es zuviel Zeit kostet im Vergleich zu dem sich ergebenden mathematischen Gewinn, wird man darauf aufmerksam machen und die Arbeiten in andere Richtung lenken. Dabei muß immer wieder gewarnt werden vor lebensunwahren Einkleidungen[2]).

[1]) Diese Entdeckerfreude zeigen die Kinder, wenn sie z. B. den Bruch $^{486}/_{576}$ langsam mehrmals mit 2 und 3 kürzen. Sie veranlaßte die Bitte der Kinder an den Lehrer, ihnen noch mehr solche Brüche zu sagen, die „so fein gingen"; welche Bitte er ihnen mit der Aufgabe erfüllte, sie möchten selber heimlich welche machen und sie dann den anderen aufgeben. Damit war wiederum ein Stück mathematischer Bildung gewonnen.

[2]) Wie dieser: Ein Landwirt erntete $122^{7}/_{20}$ dz Roggen, $96^{11}/_{20}$ dz Weizen, $83^{18}/_{20}$ dz Gerste und $112^{9}/_{20}$ dz Hafer. Zur Aussaat und für den eigenen Bedarf behielt er $55^{17}/_{20}$ dz Roggen, $32^{11}/_{20}$ dz Weizen, $46^{19}/_{20}$ dz Gerste und $78^{17}/_{20}$ dz Hafer. a) Wieviel Getreide erntete er im ganzen? b) Wieviel Getreide behielt er für sich? c) Wieviel Getreide konnte er verkaufen? — Die ganze Form der Aufgabe erhebt den Anspruch auf Lebensmöglichkeit. Aber man zeige mir den Landwirt, der seine Ernte und vor allem auch seinen Bedarf nach 20teln vom Doppelzentner berechnet! Der außerdem die Fragen a, b und c auszurechnen für sinnvoll hielte. Da ist es besser, die Kinder bilden Phantasieaufgaben, von denen sie von vornherein wissen, sie sind nur zum Üben da, aber nicht in der Wirklichkeit. In demselben Rechenhefte findet sich 2 Seiten weiter hinten noch folgende schöne Aufgabe: K. erntete von Spalierobstbäumchen $14^{3}/_{4}$ Schck. Äpfel, $12^{3}/_{4}$ Schck. Birnen, $5^{8}/_{15}$ Schck. Pfirsiche und $4^{5}/_{8}$ Schck. Aprikosen. Von diesen Sorten verkaufte er $7^{5}/_{8}$, $8^{3}/_{4}$, $3^{1}/_{2}$ und $2^{3}/_{2}$ Schck. a) Wieviel Schck. erntete er zusammen? b) Wieviel Schck. verkaufte er? c) Wieviel Schck. behielt er? Daß dieser Schelm seine Früchte, die er stückweise abgenommen und verkauft hat, erst in Schock umrechnet, um lustige Schulbüblein, die lieber hineinbissen, mit Brüchen zu ärgern, das ist nicht

Auch hier lernt zunächst kein Kind, „wie man Brüche addiert", d. h. es lernt keine Regel, es bildet auch keine Abstraktion des durchlaufenen Wegs. Erst hinterher, wenn die Sache längst klar ist, ja wenn sie sogar durch andere Übungen wieder etwas verdunkelt ist, mag der Lehrer einmal das Problem stellen: Wie wäre es, wenn euch jetzt jemand fragte, wie man Brüche zusammenzählt? Dadurch würden die Kinder genötigt, zu konkretisieren. Manche würden es vielleicht so tun: $^1/_5$ und $^2/_5$ sind $^3/_5$, und antworten: Ja, wie ist denn das gemeint? Die zählt man doch einfach zusammen. Der Lehrer würde dann zu erforschen haben, an welches Beispiel gedacht worden sei, und würde dann kaum nötig haben, darauf hinzuweisen, daß man doch noch an andere Beispiele denken könne. Dann werden diese Kinder selbst darauf kommen, daß es doch nicht immer solch „passende" Brüche sein müßten[1]). Und die Entgegnung der Kinder wird lauten: „Ja, wenn sie noch nicht gleichnamig sind, dann muß man sie eben erst gleichnamig machen" — als wäre das selbstverständlich. Dahin wollen wir mit unserer mathematischen Erziehung.

Auch das Multiplizieren verursacht keine wesentlichen Schwierigkeiten, nicht einmal das von Brüchen miteinander. Etwas Neues braucht ja eigentlich auch nicht gelernt zu werden, es ist lediglich ein Übertragen des Bekannten auf neue Fälle, und damit allerdings eine innere Befreiung von bloß individueller Gültigkeit. Sollte aber wirklich ein Kind stutzig werden bei der Aufgabe $^2/_7 \cdot ^3/_4$, so soll es selbstverständlich nicht die Regel hersagen müssen: Brüche werden multipliziert, indem man ..., sondern es soll sich eines ähnlichen, leichteren Falles erinnern, vielleicht $^1/_3 \cdot ^1/_4$. Da wird es sich dessen bewußt werden, daß da gemeint ist, es soll von $^1/_3$ den vierten Teil nehmen. Dies wendet es auf seinen neuen Fall an: es wird von $^2/_7$ erst den 4. Teil suchen und diesen dann 3 mal nehmen. Sollte das etwas länger dauern als die mechanisierte Rechnung, so schadet das nichts. Solches Selbstwiedergewinnen ist wirksamer für die mathematische Bildung, als Mechanisierung ohne diese Fähigkeit des Selbstfindens. Wenn dieses Mechanisieren verloren gegangen ist, dem kommt ein offenbarer Mangel an rechnerischer Bildung zum Bewußtsein, ein Mangel, der nicht selbständig ausgeglichen werden kann. Mathematische Bildung aber hat den Sinn, daß sie sich selbständig weiter zu helfen weiß.

hübsch von ihm. Und die Rechenfragen sind praktisch ebenso wichtig wie die des vorigen Beispiels.

[1]) Das wirkliche Leben bringt allerdings nur selten „unpassende", ungleichnamige Brüche; die Bruchrechnung der Rechenbücher enthält darum soviel Phantasieaufgaben.

Übrigens kann ein Kind, das an die räumlich-anschauliche Vorstellungsweise der Zahlgrößen gewöhnt ist, meist schon auf der vorigen Stufe folgende Gedankenreihe bilden: $^3/_4 \cdot 2$, das ist $^3/_4$ und noch $^3/_4$; $^3/_4 \cdot 1$, da bleibt es $^3/_4$. Aber $^3/_4 \cdot ^3/_4$, da muß es weniger werden als $^3/_4$. Ich kann dafür sagen: von $^3/_4$ nur $^3/_4$. Nehme ich von $^3/_4$ nur $^1/_4$, d. h. den vierten Teil, so muß ich jedes Viertel wieder vierteln, gibt $^3/_{16}$; nehme ich 3 solche Viertel, so habe ich $^9/_{16}$; $^3/_4 \cdot ^3/_4$ sind also $^9/_{16}$. Ich hätte also $3 \cdot 3$ und $4 \cdot 4$ rechnen können, oder die Zähler miteinander malnehmen und ebenso die Nenner. — Ein Kind, das diesen Gedankengang noch nicht selbständig gehen kann, soll man eigentlich mit derartigen Aufgaben verschonen. Es ist innerlich für diese Stufe noch nicht reif. —

Das Dividieren mit Brüchen wird nun in allen seinen verschiedenen Formen auftreten. Je nach den Verhältnissen wird man sich damit begnügen, die Division Bruch durch Bruch lediglich auffassen zu lassen als Enthaltensein, wie es viele Rechenbücher tun; also $^2/_3$ in $^7/_8$. In dieser Form ist es für den kindlichen Intellekt gerade noch faßbar, etwa so: das geht besser, wenn es gleichnamige Brüche sind: $^{16}/_{24}$ in $^{21}/_{24}$; das geht ebenso oft wie 16 in 21, nämlich $1^5/_{16}$ mal. Auch diese Form ist auf der 2. Stufe vorbereitet worden. Die Division Bruch durch Bruch wirklich als Teilung auffassen zu lassen, ist zwar möglich, aber wesentlich schwieriger. Bei $^5/_9 : ^3/_4$ bedeutet es eben schon ein erhebliches Maß von Abstraktion, sich zu sagen: diese Aufgabe verlangt, daß man die gegebenen $^5/_9$ als 3 Viertel einer gesuchten Zahl ansehen solle, genau so, wie bei der Aufgabe $^5/_9 : 2$ die 5 Neuntel das Zweifache der gesuchten Zahl sind.

Leichter wäre es ja, aber mathematisch nicht einwandfrei, wenn man sagte: dies Teilen von Brüchen durcheinander geht jedenfalls besser, wenn ich sie gleichnamig mache; dann heißt es, ich solle $^{20}/_{36} : ^{27}/_{36}$ teilen; das ist so gut, als wenn ich $20:27$ teilen soll, ist $^{20}/_{27}$. Nicht einwandfrei deswegen, weil für dieses Weglassen der Nenner der innere Nachweis fehlt (der Nachweis, „daß dasselbe herauskommt“, ist nicht ausreichend), weil an Stelle der eigentlichen Division das Enthaltensein tritt: statt einer Substantialzahl und einer Funktionalzahl erscheinen zwei Substantialzahlen. Zu rechtfertigen wäre dies Verfahren höchstens so: Wo ich nicht teilen kann, wo das Teilen keinen Sinn hat (durch $^3/_4$ teilen!), da kann ich dasselbe praktische Ergebnis mit dem Enthaltensein erreichen. Aber die Klarheit darüber, daß man an Stelle des eigentlich verlangten Verfahrens ein anderes ausübt, ist nötig und ist zugleich die Begründung für die zugelassene Einschränkung.

Zusammenfassend wäre zu dieser Stufe noch folgendes zu bemerken. Trotzdem sie die Abstraktion der Bruchrechnung in

hohem Maße vermittelt, können wir doch in Rücksicht auf die Kindesnatur und die psychologische Gestaltung aller Begriffsgewinnung nicht von der Forderung der jeweiligen Konkretisierung ablassen. Das Konkretisieren wird selbstverständlich nach und nach stärker zurücktreten, es wird aber zutage treten z. B. in den Phantasieaufgaben der Kinder, die auch für diese Stufe eine Notwendigkeit bleiben, wobei der Vergleich mit der Wirklichkeit nie schadet.

Dagegen ist diese Stufe nun der Ort, an dem auch die reinen Zahlenaufgaben aus der Bruchrechnung ihre eigentliche Stätte finden. Doch sollen auch die hierfür in Betracht kommenden Übungen nicht der bloßen Tretmühlarbeit gleichen, die nur zur Mechanisierung führt[1]). Mit dieser Forderung wollen wir es dem Kinde keineswegs bequem machen; das geschieht vielmehr seitens derer, die sich mit der Mechanisierung begnügen. Jeder merkt doch an sich selbst, und schon das Kind merkt es, daß ein assoziativer Gedankenablauf bequemer ist als ein apperzeptiver, oder ohne psychologischen Ausdruck, daß etwas auswendig Gelerntes leichter abläuft als etwas, das im Augenblicke zu gestalten ist; und weil es das merkt, darum drängt ja das Kind zur Mechanisierung. Aber es verzichtet dabei auf Bildung. Darum ist es unsere Aufgabe, die Kinder anzuhalten, sich bei jeder, auch der scheinbar blassesten Zahlenaufgabe, etwas zu denken. Gerade bei reinen Zahlenaufgaben wollen wir uns bemühen, den mathematischen Sinn der Sache zu suchen, wie das schon früher angedeutet worden ist.

Ferner möchten wir gerade die Aufgaben der Bruchrechnung immer mehr denjenigen Gebieten entnehmen lernen, auf denen sie tatsächlich vorkommen. Das sind nicht so sehr die Gebiete der häuslichen Wirtschaftsführung, als vielmehr die der Technik, des Verkehrs, der Wissenschaft, der Statistik usw. Wir werden noch Gelegenheit haben, hierauf näher einzugehen; hier sei zunächst auf diese Gedanken verwiesen.

Endlich ist noch die Frage der Einübung zu berühren. Mancher behauptet: Das Multiplizieren von Brüchen, auch das Dividieren von Brüchen und ähnliches muß mechanisch sicher gehen. Wir können uns dem nicht anschließen, wenn diese Forderung den Sinn haben sollte: Nach der Einführung ins Verständnis müsse die Mechanisierung herbeigeführt werden. Das ist ja die landläufige didaktische Auffassung. Aber nicht nach, sondern nur innerhalb der Gewinnung des Verständnisses darf eine Mechanisierung eintreten, und sie wird bei solcher Gestaltung von selbst kommen.

[1]) Man sehe sich daraufhin die Rechenbücher an, und man wird bei manchem sein blaues Wunder sehen.

jene Auffassung glaubt, die Gewinnung des Verständnisses sei ein Einzelakt von verhältnismäßiger Kürze, nach dessen Abschluß die Mechanisierung einzutreten habe; diese neue Auffassung sieht in jener ersten Bekanntschaft die Gewinnung des Verständnisses nicht vollendet, sondern findet, daß das Verständnis so lange zunimmt, als neben den Mechanisierungstendenzen die volle Aufmerksamkeit sich der Sache zuwendet. Dadurch bekommt jene Mechanisierung einen anderen Charakter als diese: jene ist eine angelernte, die nicht die Möglichkeit der Entwicklung in sich trägt; diese ist eine von höherer Art, die beherrscht und beeinflußt wird vom Geist. Jene ist natürlich leichter zu erwerben als diese. Aber sollen wir abwägen, so ist es uns lieber, daß ein Kind so viel mathematische Einsicht gewinnt, daß es — wenn ihm der praktische Fall vorliegt — erkennt, ob eine Bruchdivision oder eine andere Operation auszuführen ist, und sich — wenn auch langsam — überlegt, was denn das eigentlich bedeute. Hierbei ist noch keine der beiden Arten von Mechanisierung vorhanden. Dies ist uns aber lieber, als wenn das Kind die Bruchdivision mechanisch sicher ausführt, aber dabei nicht oder nur unsicher erkennen kann, ob es mit der Bruchdivision die richtige Operation gewählt hat. Wir wollen damit Mechanisierungsübungen keineswegs ablehnen, nur davor warnen, sie zu früh einsetzen zu lassen und ihrer Wirkung zuviel zuzutrauen. Das rechte Verständnis für die mathematischen Erscheinungen führt zum rechten Verhalten, und dies, oft wiederholt, ergibt die rechte Mechanisierung.

§ 38. Die Dezimalbrüche.

Auch hier schreiten wir in drei Stufen aufwärts, die im allgemeinen denen des vorigen Abschnitts entsprechen. Wir bezeichnen sie hier als Vorbereitungsstufe, Hauptstufe und Ergänzungsstufe und deuten damit schon an, daß gewisse Unterschiede sich geltend machen, die nun mit hervorzuheben sind.

Die erste Stufe, die der Vorbereitung, behandelt — wie die Stufe der Grundlegung im vorigen Abschnitt — diejenigen Brüche, welche im Gebrauche des täglichen Lebens und damit schon im Gebrauche des Kindes sind. Waren das im Gebiete der gewöhnlichen Brüche nur drei, so sind es hier noch weniger, nur einer, nämlich die Hundertel. 2,50 ℳ liest auch schon das achtjährige Kind in den Schaufenstern und in den Zeitungen und begreift auch, daß damit gemeint ist 2 ℳ und 50 ₰. Ebenso 1,75 ℳ; 3,60 ℳ; 1,25 ℳ; 5,80 ℳ; 0,80 ℳ usw. Von dieser Erfahrung ausgehend und sie fleißig heranziehend, macht es gar keine Schwierigkeiten, die Kinder an diese Form als an eine andere Schreibart für Mark und

Pfennige zu gewöhnen, so daß sie sie selbst neben der Doppelbenennung anwenden. Damit allerdings keine sinnlose Verwischung eintritt, und damit das Problem offen bleibt, darf nicht gelesen werden: 2 Mark und 50 Pfennige, sondern zwei Komma fünfzig Mark. Und dasselbe kann nach und nach auch mit Metern und Zentimetern, später auch mit Hektolitern und Litern vorgenommen werden, so daß die Kinder mit dieser Bezeichnung auch bei anderen Maßangaben vertraut werden.

Diese verschiedene Schreibung ist auch die einzige Verwandlung, die auf dieser Stufe in Betracht kommt. Von anderen Dezimalbrüchen ist ja noch nicht die Rede, und vom Bruchcharakter auch noch nicht. Gerade dies letztere ist bedeutsam, weil es uns ein — vielleicht umstrittenes — Mittel an die Hand gibt, einer Reihe von Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen. In dieser Form der Schreibung werden nämlich ohne weitere Darlegung der Gründe sämtliche Operationen getrieben. Es werden also Additionen und Subtraktionen ausgeführt wie die folgenden:

15,37 ℳ	43,35 ℳ
+ 2,28 „	— 8,60 „
+ 11,05 „	— 33,49 „
28,70 ℳ	11,26 ℳ.

Es werden ferner in dieser Form Mark-, Meter- und Hektoliterangaben multipliziert, wobei allerdings der Dezimalbruch seinem vorläufigen Charakter als reiner Substantialzahl angemessen nur Multiplikand sein kann, z. B.

11,33 m · 6
193,98 m.

Dem schließt sich an das Enthaltensein, selbstverständlich immer mit Bezeichnung, doch ist es in kleineren wie in größeren Zahlen möglich:

1,20 ℳ in 20,40 ℳ.

Hier werden beide Zahlen als Pfennige angesehen und gerechnet: 120 ₰ in 2040 ₰ ist 17 mal enthalten.

Entsprechend wird in cm gerechnet die Aufgabe:

0,75 m in 26,75 m = 35 mal Rest 50 cm

oder Rest 0,50 m. Es bedarf wohl nur des Hinweises, daß sämtliche Aufgaben dieser Stufe noch mit Resten gerechnet werden, nicht mit einem Dezimalbruch als Quotienten. Auch die Teilung geht unschwer vonstatten, wenn sie sich in den Grenzen hält, die den Kindern durch den jeweiligen Stand ihrer Zahlauffassung gesteckt sind; z. B.

36,28 ℳ : 8 = 4,53 ℳ Rest 4 ₰.

Der Hauptgedanke dieser Stufe ist, daß sie die Aufgabe hat, einzuführen in den Geist dezimaler Bezeichnung dadurch, daß sie lediglich die dezimale Schreibung in allen bekannten Operationen übt. Daß das nichts irgendwie Ausreichendes ist, sondern lediglich etwas Vorbereitendes, leuchtet ohne weiteres ein. Darum bezeichneten wir diese Stufe mit diesem Namen; ihrem Inhalte nach würden wir sie als Stufe der dezimalen Schreibung bezeichnen können. Andrerseits ist aber auch nicht zu verkennen, daß bei Begabungen, die über die allerelementarste mathematische Bildung nicht hinauskommen — wir brauchen nur an leichtere Formen des Schwachsinns zu denken — mit der Erreichung dieser Stufe dennoch ein gewisses verständiges Können gewonnen ist, so daß diese Stufe den Namen einer Stufe trotzdem verdient, und nicht lediglich Zukunftsarbeit leistet, wie sie leider noch so manches Fach unseres heutigen Unterrichts an verschiedenen Stellen aufweist. —

Die zweite Stufe, die Hauptstufe, bringt an Brüchen dazu die Zehntel und die Tausendel, so daß nun mit drei verschiedenen Dezimalbruchnennern hantiert wird. Auch die beiden neuen werden zunächst noch als andere Schreibung eingeführt für Meter und Millimeter, Kilometer und Meter, Kilogramm und Gramm, Tonne und Kilogramm. Dazu tritt aber im Zehntelzentimeter, Zehntelmeter, Zehntelliter, Zehntelkilogramm usw. sogleich der Gedanke des Bruches. Und nachdem die Kinder in der Schreibung der genannten Einheiten — immer im Anklange an die geläufige dezimale Schreibung von Mark und Pfennigen — hinreichend geübt sind, wird er derjenige Gedanke, der der ganzen Stufe den Inhalt und das Ziel gibt: Die Kinder sollen die Dezimalzahlen als Brüche auffassen lernen. Bei den Zehnteln ist es am leichtesten; aber ein Staunen geht den Kindern auf, wenn sie es auch bei den Hunderteln entdecken: Ja freilich, Pfennige sind doch immer Hundertel-Mark, und Zentimeter immer Hundertel-Meter! Nunmehr tritt natürlich neben das Kommalesen das Nennerlesen, also neben drei Komma fünfundsiebzig Mark nun drei und fünfundsiebzig Hundertel Mark. Wem jene Form des Kommalesens weniger zusagt, kann sie ja nun ganz ersetzen durch das Nennerlesen; uns schienen beide nebeneinander ihre Vorteile zu bieten.

Unter jenem Hauptgedanken treten nun zwei Übungen besonders hervor. Einmal das Verwandeln der bekannten Brüche ineinander, also sowohl der Dezimalbrüche der Zehntel, Hundertel und Tausendel ineinander, als auch der bekannten gewöhnlichen Brüche der Halben, Viertel, Achtel, Fünftel, Zehntel, Zwanzigtel in Dezimalbrüche[1]). Wenn die Kinder 25tel dazu nehmen aus eigener Kraft,

[1]) Wir wollen also diese Stufe zwischen die 2. und 3. Stufe der Rechnung mit gewöhnlichen Brüchen eingeschaltet wissen. Vergl dazu den Plan.

wird man es nicht verwehren. Die Verwandlung der gewöhnlichen in Dezimalbrüche kommt auf ein Erweitern, die Rückverwandlung auf ein Kürzen hinaus.

Neben dem Verwandeln ist von besonderer Bedeutung die Multiplikation von Dezimalzahlen mit den Systemeinheiten 10, 100, 1000, ganz besonders in fortwährender Nebeneinanderstellung:

$$\begin{aligned} 132{,}64 \text{ M} \cdot 10 &= 1326{,}40 \text{ M} \\ 132{,}64 \text{ „} \cdot 100 &= 13264{,}00 \text{ „} \\ 132{,}64 \text{ „} \cdot 1000 &= 132640{,}00 \text{ „} \end{aligned}$$

Dabei ist allerdings mit Sorgfalt darauf zu achten, daß die Sache nicht mechanisch ausgeführt wird, wozu die Kinder leicht neigen. Wenn man sie sagen hört: beim nächsten wird es weiter links gerückt, dann ist es Zeit, die Übungen durcheinander zu werfen. Sonst bliebe die kindliche Arbeit eine Fingerübung, allenfalls eine Übung im Ziffernschreiben, wäre aber kein Rechnen. Dies verlangt aber, daß der Gedanke bereit ist: 2·100 gibt 200 oder 4 Hundertel mal 100 gibt 4 Einer usw.

An diese beiden bevorzugten Übungen reihen sich nun die anderen an: Addieren und Subtrahieren bietet keine Hindernisse, wo gleichnamige Dezimalbrüche in Betracht kommen, und keine nennenswerten bei ungleichnamigen, weil sich die Kinder eben daran erinnern, wie sie sich sonst bei Brüchen geholfen haben. Demzufolge kann, soweit dies noch nötig erscheint, gerechnet werden

$$\begin{array}{r} 7{,}965 \\ +19{,}3 \end{array} \quad \text{als} \quad \begin{array}{r} 7{,}965 \\ +19{,}300 \end{array}$$

Die Verwandlungsübungen bewirken aber sehr bald, selbst wenn entsprechende Zerlegungsübungen nicht vorgenommen worden wären, daß jene erste Zahl aufgefaßt wird als 7 Ganze, 9 Zehntel, 6 Hundertel und 5 Tausendel, so daß das Gleichnamigmachen überflüssig wird und einfach Zehntel zu Zehnteln usw. addiert und entsprechend subtrahiert werden.

Das Multiplizieren von Dezimalbrüchen mit ganzen Zahlen ist so weit vorbereitet, daß es ohne weiteres einsetzen kann. Beim Multiplizieren von Dezimalbrüchen miteinander aber kommen die Ergebnisse der übrigen Bruchrechnung in Betracht. Bei 6,17 · 0,3 hat sich das Kind dessen bewußt zu werden: Wenn ich Hundertel 1 mal, 2 mal, 3 mal nehme, bleiben es Hundertel; wenn ich sie aber mit Zehnteln malnehme, können es nicht Hundertel bleiben, sondern es werden Tausendel daraus. Das obige Beispiel darf also von vornherein keine andere schriftliche Form bekommen als die:

$$\frac{6{,}17 \cdot 0{,}3}{1{,}851}$$

d. h. es soll von Anfang an Klarheit darüber herrschen, was das Ergebnis jedes einzelnen Rechenschrittes sein kann. Eine Regel von der Art: Ich rechne wie mit ganzen Zahlen und schneide dann so viel Dezimalstellen ab, wie überhaupt vorhanden sind — ist für den Rechenunterricht nicht nur sinnlos, sondern direkt schädlich, weil sie das mathematische Denken und die mathematische Bildung verhindert. Wer die Sache beherrscht, kann sich eine solche Regel für seinen Privatgebrauch zurechtlegen, dagegen ist nichts einzuwenden. Und wenn ein kleiner Schlaumeier von selbst auf dies Ergebnis gerät — er wird das voller Entdeckerfreude mitteilen —, so kann man ihm sagen: Meinetwegen rechne so, aber prüfe öfters nach, daß du dich nicht einmal versiehst! Oder: Wenn du immer weißt, warum das so ist, darfst du auch so rechnen! Dadurch gewinnt s e i n e Regel außer der Gefühlsbetontheit der eigenen Entdeckung noch die eines heimlichen Schatzes, der so zu sichern ist, daß er nicht verloren gehen kann. In solchem Falle wird sie als erworbener Wert selbst im Unterrichte ihre Berechtigung haben.

Das D i v i d i e r e n von Dezimalbrüchen war schon auf der Vorstufe als Enthaltensein von Hunderteln geübt worden. Hier treten Zehntel und Tausendel dazu, wodurch lediglich Gleichnamigmachen veranlaßt wird:

$$3{,}885 \text{ in } 17{,}2 = 3{,}885 \text{ in } 17{,}200 = 4 \text{ Rest } 1{,}66$$
$$\frac{15{,}540}{1{,}660.}$$

Im umgekehrten Falle kann dies Gleichnamigmachen sogar unterbleiben, wenn das Verständnis für den gesamten Vorgang vorhanden ist:

$$52{,}7 \text{ in } 843{,}394 = 1 \text{ (d. h. 10 mal)}$$
$$\frac{527}{\text{in } 316{,}394 = 6 \text{ mal}}$$
$$\frac{316{,}2}{0{,}194 \quad \text{zus. 16 mal Rest } 0{,}194.}$$

Auch hier empfiehlt sich die Division mit Resten.

B l i c k e n wir z u r ü c k ! Während die V o r s t u f e die Dezimalzahlen lediglich als v e r ä n d e r t e S c h r e i b u n g der üblichen Einheiten dezimaler Währung auffassen ließ, bringt die H a u p t s t u f e das tiefere Verständnis dafür, indem sie ununterbrochen darauf hält, die Dezimalzahlen a l s B r ü c h e aufzufassen und zu behandeln.

Auch diese Stufe trägt in sich einen gewissen Abschluß. Wenn wir erreichen könnten, daß alle unsere Volksgenossen, männliche wie weibliche, im Alter zwischen 16 und 25 Jahren das bisher angedeutete Rechengebiet beherrschten, dann könnten wir uns zu solchem Erfolge höchlichst beglückwünschen. Er liegt noch in weiter Ferne, aber er ist — von den oben angedeuteten Ausnahmen abgesehen — möglich; allerdings nur dann, wenn der Geist, das denkende Eindringen, nicht vor dem Mechanismus die Flucht ergreifen muß, und das tut er als anständiger Charakter überall da, wo ihm dieser mit gleichen Ansprüchen entgegentritt. —

Endlich die dritte, die Ergänzungsstufe. Sie fügt den bisherigen drei Dezimalzahlen alle übrigen hinzu. Damit auch dies Beginnen auf eine anschauliche Grundlage gestellt werde, empfiehlt es sich, an dieser Stelle die Flächen- und Körpermaße entsprechend heranzuziehen: Quadratmeter und Quadratzentimeter, Kubikmeter und Kubikzentimeter usw. Und ein ebenso dankbares Gebiet ist die Berechnung von Kartenmaßstäben.

Diese Stufe geht nun über die beiden vorigen noch ein ganzes Stück hinaus, und zwar dadurch, daß sie die Stammbrüche der Dezimalzahlen auffassen läßt als die zwischen 1 und 0 vorhandenen niederen Einheiten unseres Zahlensystems. War auf der vorigen Stufe die gegenseitige Verwandlung von Zehnteln, Hunderteln und Tausendeln noch einigermaßen zu übersehen (z. B. in der Erinnerung an die Zahlenbilder), so nimmt hier die Verwandlung einen abstrakteren Charakter an, weil sie von höherem Standpunkte aus vor sich geht. So werden wir die 72000, die 365, die 4, die 0,03 in den verschiedensten Systemeinheiten auszudrücken suchen, wir werden aber auch z. B. die 0,00005 vergleichen mit den verschiedenen Werten, welche die 5 enthält an anderen Stellen des Systems. Dies kann sehr wirkungsvoll als Reihe, in anderer Hinsicht wirkungsvoll aber auch außer der Reihe geschehen. Damit ist hier eine Stelle gekennzeichnet, wo auch der Einblick ins Zahlensystem eine wesentliche Vertiefung erfährt.

Entsprechend den Hauptübungen der vorigen Stufe schließt sich hieran die Fortsetzung der Multiplikation mit den Systemeinheiten 10, 100 bis zur Million, und es tritt hinzu die Division mit den Systemeinheiten; also

35000 : 10, 100, 1000, 10000 usw.
oder 76,2 : 10, 100, 1000, 10000 usw.

Daß auch hier kein Mechanismus, sondern nur verständiges Tun in Betracht kommen kann, bedarf keiner näheren Ausführung.

Die Teilungsform der Division kann nun als gleichwirkend neben das Enthaltensein gestellt werden. Unterschieden

werden muß beides, aber es soll nunmehr mit Absicht und Verständnis füreinander eingesetzt werden.

Auf die Stufe der Ergänzung, die einerseits das Zahlensystem durch die gebrochenen Einheiten erweitert hat, andrerseits über die Division in abstraktem Sinne verfügt, gehört auch die *Verwandlung der übrigen gewöhnlichen Brüche in Dezimalbrüche*. Die Auffassung, daß $^2/_3$ im Sinne des Zahlensystems eine unausgeführte Division ist, ebenso wie $\frac{2000}{3}$, die man erst noch auszuführen hat mittels der niederen Einheiten des Zahlensystems als 0,6666 ..., führt hin zum Begriffe *des unendlichen Dezimalbruchs*. Damit bekommen die Kinder dieser Stufe schon ein leises Gefühl für die mathematischen Begriffe der *Annäherung*, der *beliebigen* und der *zureichenden Genauigkeit*, des *zulässigen Fehlers*, endlich der Wirkung der Division einerseits und der Multiplikation andrerseits auf den vorhandenen Fehler. Sogar einfache Fehlerbestimmungen sind in diesem Zusammenhange möglich, z. B. 0,667 weicht ab von $^2/_3$; wir stellen das genau fest durch Multiplikation mit 3000; $^2/_3 \cdot 3000 = 2000$ und $0{,}67 : 3000 = 2001$; diese Zahl ist also um $\frac{1}{3000}$ größer als jene.

Daran schließt sich die *Rückverwandlung* periodischer Dezimalbrüche in gewöhnliche. Auch die Kinder der Volksschule, welche einen guten Rechenunterricht genossen haben, begreifen recht gut folgendes:

Wir wollen hinschreiben das 10fache von 0,5555 ..	= 5,5555 ...;
wir wollen davon abziehen das einfache	− 0,5555 ...
da wird das 9fache übrig bleiben	= 5,0000;

wenn aber 5 das 9fache jenes Bruches ist, so heißt der einfache Bruch $^5/_9$. Die Divisionsverwandlung in einen Dezimalbruch als Probe bestätigt die Richtigkeit der Rechnung.

Oder 0,3272727 ... Wir ziehen von einem Mehrfachen dieser Zahl ein kleineres Mehrfaches ab, und zwar so, daß der unendliche Dezimalbruch wegfällt. Das geschieht so:

327,27 27 27 ..	= das	1000fache
3,27 27 27 ..	= „	10 „
324	= das	990fache

Damit heißt der Bruch $^{324}/_{990} = ^{36}/_{110} = ^{18}/_{55}$.

Wer dagegen glaubt, mit dem Mechanismus vom Untersetzen der Neunen und dem Untersetzen von soviel Neunen und soviel Nullen usw. mathematische Bildung vermitteln zu können, der ist auf völlig falschem Wege.

Fassen wir zusammen! Die Rechnung mit gewöhnlichen wie mit Dezimalbrüchen ist zu behandeln in je drei Schwierigkeitsstufen. Allerdings ist das nicht etwa so gemeint, daß nun jedes Jahr eine neue Stufe erklommen werden müßte, etwa im 5., 6. und 7. je eine. Wohl geben sie eine zeitliche Ordnung an in dem Sinne, daß jede folgende die frühere voraussetzt. Aber es wurde schon darauf hingewiesen, daß jede dieser Stufen in sich einen gewissen Abschluß bedeutet, so daß ein Kind, das nur die beiden Unterstufen erreicht hätte, noch nicht wesentliche Lücken in seiner rechnerischen Ausbildung aufwiese. So selten freilich in der Praxis dieser Fall eintreten wird, so häufig wird der andere sein, daß Kinder nicht bis zu den oberen Stufen beider Rechnungsformen gelangen. Das bedeutet für solche Kinder aber keine Schädigung, sondern eine Erleichterung. Intelligenzen, die in ihrer Beweglichkeit hinter ihrem Alter zurückstehen, oder auch solche, die vielleicht eine künstlerische Begabung entwickeln werden, brauchen dann nicht die Abstraktionen der Ergänzungsstufen mitzumachen. Sie würden sie doch nur in Worten bewältigen können und keinen Gewinn davon haben. Für sie genügt die Mittelstufe. Diese Gliederung in Schwierigkeitsstufen gestattet uns also eine weitgehende Berücksichtigung der individuellen Anlagen und Kräfte. Nach deren Vorhandensein kann jeder gefördert werden. Wenn man übrigens den Nachdruck auf die Förderung legt, so fällt noch ein volleres Licht auf diese Gliederung. Daß die Schwachen nicht so mitkönnen, wie wir es wünschten, lastete in der Unterrichtspraxis noch nicht so schwer auf uns; sie zu fördern, ist ja unsere schöne Aufgabe, und sie sind so dankbar dafür. Aber daß die Befähigteren durch die Schwächeren zurückgehalten werden, daß wir sie nicht so fördern können, wie wir und sie es wohl möchten, weil die Schwachen unsere Kräfte in Anspruch nehmen, das ist viel drückender und auch bedenklicher. In diesen Schwierigkeitsstufen ist nun gerade den Befähigteren Gelegenheit gegeben, vorwärts zu schreiten, ohne dabei von den andern in dem bisher üblichen Maße gehindert zu werden. Eine notwendige Hilfe dabei ist allerdings das eigene Aufgabenbilden der Kinder; das ist aber nachgerade eine selbstverständliche technische Voraussetzung.

§ 39. Hundertelrechnung.[1]

In der Prozentrechnung erblickt man heute noch eine Rechnung mit besonderen Schwierigkeiten. Man verweist sie darum gänzlich auf die Oberstufe — 7. und 8. Schuljahr, man klagt dar-

[1] Vergl. dazu Anmerkung 1 S. 306.

über, daß sie auch dort noch vielen Kindern sehr schwer falle, und man sucht auch hier des Übels Herr zu werden durch tägliche Rechenübungen, manchmal einschließlich der Zinsdivisoren.

Diese Schwierigkeiten entspringen aber zum guten Teile dem Herkommen und sind demnach meist selbst bereitet. Unsere Augen waren gehalten, so daß wir nicht sahen, wie einfach eigentlich die Sache ist.

Eines der Hindernisse ist unsere leidige Fremdwörtersucht oder vielmehr die unserer Kaufmannschaft. Was ganz gut deutsch und allgemein verständlich auszudrücken war und in dieser Ausdrucksweise keiner Mißdeutung begegnete: Guthaben, Schulden, Tilgung, Schuldverschreibung, Empfänger und hundert andere Begriffe, mußte sie in fremder Zunge aussprechen. Sie konnte auch in unserem Falle nicht anders als italienisch sich ausdrücken: pro cento. Erfreulicherweise sagt man heute ohne das geringste Mißverständnis 4 auf Hundert, 5 auf 100, 10 auf 100, oder 3 vom Hundert, 6 vom Hundert. Ebenso einfach wäre es, die Prozentzahlen als Dezimalzahlen, die sie ja eigentlich sind, aufzufassen und zu benennen: 4½ Hundertel werden als Leihzins vereinbart, 6 Hundertel gingen an der Kaufsumme verloren, 15 Hundertel wurden gewonnen, 2 Hundertel unserer Ortsbewohner sind vergangenes Jahr gestorben, 8 Hundertel unserer Schüler haben im November gefehlt. Ja, selbst die Schreibung ließe sich dem anpassen: Zinsen zu 0,05; Gewinn von 0,80; Verlust von 0,07; Rabatt von 0,10 usw. Es bedürfte nur der Geneigtheit der Behörden und des Handels, um in ein paar Jahren eine solche Gewöhnung herbeigeführt zu haben. Was dies aber für das Verständnis und das Erlernen bedeutet, das braucht dem Pädagogen nicht ausgeführt zu werden.

Das andere Hindernis ist unser Kleben am traditionellen Verfahren, was ja zum Teil schon in den vorigen Ausführungen mit angedeutet ist. Aber auch im besonderen unser Lehrverfahren scheint nicht anders gedacht werden zu können, als daß erst ein Rechenabschnitt eingeübt wird, in dem „die Prozente gegeben" sind, dann einer, in dem „die Prozente gesucht" werden, dann einer, in dem der Rabatt gesucht wird, ferner die Zinsen, der Zinsfuß, das Kapital, die Zeit usw. So steht es in den Rechenbüchern wohl ohne Ausnahme; jedesmal suggerieren wir uns und den Kindern eine neue Rechnungsform, neue Schwierigkeiten und einen unfehlbaren Lösungsweg, der gelernt und eingeübt werden muß.

Von diesen beiden Hindernissen loszukommen, zielbewußt vorzugehen, das innere Wesen der Sache zu erfassen und erfassen zu lassen, das muß unsere Aufgabe sein.

Der Charakter der Prozentzahl als eines ganz gewöhnlichen Dezimalbruches mit dem Nenner 100 ist schon angedeutet

worden. Dieser Dezimalbruch bezieht sich auf irgendeine Gesamtheit. Aber mit diesen beiden Erkenntnissen ist ihr inneres Wesen noch nicht ganz erfaßt. Wollen wir dahinein dringen, so ist es ratsam, sich die verschiedensten Beispiele zu vergegenwärtigen: eine Kaffeesendung hat 10 Hundertel Gewinn gebracht, eine andere 15; ein Staatspapier bringt 4, das andere 5 Hundertel Zinsen; eine Speise hat 40, die andre 30 Hundertel Eiweißgehalt; eine Rechenarbeit zeigt 5, eine andere 6 Hundertel Fehler; Spiritus von 95 und von 90 Hundertel Gehalt usw. In allen diesen Fällen wird die Hundertelzahl als V e r g l e i c h s z a h l angewendet, die Geltung hat ohne Bezugnahme auf die jeweiligen Mengen. Wir vergleichen die Ertragsfähigkeit, die Wirksamkeit, die Güte, und sind imstande, diesen an sich schwierigen Vergleichen einen zahlenmäßigen Ausdruck zu geben. Damit gewinnt die Hundertelzahl einen q u a l i t a t i v e n C h a r a k t e r, sie wird zum objektiven Wertmaß für die verschiedensten Qualitäten. Sie ist selbstverständlich nicht das einzige[1]), wohl aber das am häufigsten angewandte. Sie ist dasjenige, welches eine zahlenmäßige Bewertung von Qualitäten auf fast allen Gebieten gestattet, und zwar entweder im Vergleich mit einer erfahrungsmäßigen Mittelgröße (der übliche Zinsfuß, der Rabatt des kleinen Kaufmanns, des Buchhändlers, der übliche Unkostenaufschlag, der mittlere Fehler usw.), oder im Vergleich mit einer idealen Leistung (Fehlerlosigkeit z. B.)[2]).

Erst wenn wir uns das klar gemacht haben, sind wir imstande, die richtige Einstellung unsers erzieherischen Tuns vorzunehmen. Diese Zielbewußtheit ist nicht darin zu finden, daß man sich sagt: Prozentrechnung ist noch dran, das Kapital wird gesucht — sondern darin, daß man sich sagt: Du hast deinen Kindern klar zu machen — und in allen in Betracht kommenden Stunden leise fühlend nachzuhelfen —, w i e w i r q u a l i t a t i v e U n t e r s c h i e d e z a h l e n-

[1]) Die Qualität von Getreide wird bestimmt durch das Gewicht eines gewissen Raummaßes von Körnern, die Güte vieler Waren zeigt sich im sparsamen Verbrauch, wie bei Seife, Kakao usw. oder in der Dauer, wie bei Webwaren, Leder usf. Die Güte einer handwerklichen Arbeit ersieht man aus der peinlichen Genauigkeit und sauberen Ausführung auch der kleinsten Teile; die Beurteilung vieler anderer Qualitäten (Wein, Zigarren, Speisen, Zensuren) ist eine mehr gefühlsmäßige, die durch Erfahrung und Übung verfeinert und gesichert wird. Zahlenmäßig läßt sich mit Ausnahme der ersten keine dieser Qualitäten bestimmen.

[2]) Zu beachten ist hierbei, daß der P r e i s einer Ware oder einer Arbeit durchaus nicht das Maß für die Qualität ist. Er sollte der Qualität entsprechen und das geschieht auch im reellen Verkehr. Aber einmal ist er noch von anderen Faktoren abhängig — der Krieg zeigt das mit aller Deutlichkeit, und sodann ist er nicht Ausdruck, sondern nur Folge der Qualität, während die Hundertelzahl Ausdruck der Qualität ist. Auch werden Unterbietung und Übervorteilung, Schwindel und Wucher und Irrtum dazu wohl nicht gleich aus der Welt geschafft werden können. Aus dem Preise einer Sache wird man also nur unter gewissen Umständen auf die Qualität schließen dürfen.

mäßig **auszudrücken versuchen**. Dieser Gedanke soll über dem Ganzen schweben, sogar dann, wenn z. B. — das Kapital gesucht wird.

Dieser Hauptgedanke lenkt unsern Blick auf die Frage: Wie ist dies unser Können den Kindern zu übermitteln? lenkt ihn also auf das Lehrverfahren. Wir können hier antworten: Es kommen keine anderen Grundsätze in Betracht als die bisher schon angeführten; dies Übermitteln kann nur geschehen mit Berücksichtigung der Wirklichkeit, insbesondere der **gefühlsbetonten Wirklichkeit**, die das Wohl und Wehe des eigenen Ich in Mitleidenschaft zieht. Hier, im Bereiche der Wirklichkeit, gilt es, einerseits die Sachlage, andrerseits das Problem klären zu lassen. Ist dies geschehen, so macht die **selbständige mathematische Ausführung** den Kindern kaum mehr Schwierigkeiten. Verschiedene Wege werden gefunden und verglichen, und als Folge der Übung erscheint die Gewinnung rascherer Technik.

Mit dem Blick auf das Ziel jenes Hauptgedankens und bewaffnet mit diesem allgemein didaktischen Rüstzeug wenden wir uns nun den einzelnen Aufgaben des Gebiets zu. Sie gilt es zunächst zu überblicken. Eine landläufige Gliederung ist die folgende:

1. Die Prozente sind gegeben: allgemeine Prozentrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung, Rabattrechnung, Zinsrechnung.

2. Die Prozente werden gesucht: allgemeine Prozentrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung, Rabattrechnung, Zinsrechnung.

3. Ergänzungen: das Kapital wird gesucht, die Zeit wird gesucht, Diskont- und Wechselrechnung.

Diese Übersicht muß uns nun stutzig machen. Denn es erhebt sich ihr gegenüber sofort die Frage: Wo bleibt denn hier der **Hauptgedanke** des zahlenmäßigen Ausdrucks qualitativer Wertung? Sie stellen, heißt sie beantworten. Denn es fällt sofort in die Augen, daß die bisherige Praxis unsers Rechenunterrichts den Hauptgedanken kaum erfaßt, geschweige denn ihn ausgeführt hat. Sie hat sich gefragt: Welche Möglichkeiten bestehen im Gebiete der Prozentzahl? Und diese Möglichkeiten wurden nun in einer geeignet erscheinenden Reihe „durchgenommen".

Der didaktisch-kritische Blick auf diese Möglichkeiten läßt aber sofort noch eine zweite Frage auftauchen, nämlich die: Kann denn hier überall die gefühlsbetonte Wirklichkeit die Grundlage sein? Diese Frage verlangt, einzelne dieser Möglichkeiten näher ins Auge zu fassen. Wir versuchen es. Die Kinder sollen beispielsweise lernen, das Kapital zu suchen, wenn Zins und Zinsfuß gegeben sind; wo kommt das im Leben vor? Die Antwort muß in der Tat ziemlich lange gesucht werden. Sie lautet: an zwei Stellen; wenn nämlich jemand ein Haus kaufen will, dann kann er aus der Höhe

der eingehenden Mieten und aus dem ihm notwendig erscheinenden Zinsfuß die Kaufsumme berechnen, bis zu welcher er höchstens gehen darf. Und sodann: wenn jemand eine bestimmte Rente sich sichern will, so kann er sich die Höhe seiner einmaligen Kapitaleinlage berechnen. Sämtliche anderen dieshezüglichen Aufgaben — wir haben daraufhin die Rechenbücher durchgesehen — sind Phantasieaufgaben, die lebensunwahr sind, weil sie die Tatsachen nicht so ins Auge fassen lassen, wie sie das Leben vorführt, sondern umgekehrt. Wenn sie nur wenigstens sich ehrlich als Phantasieaufgaben zu erkennen geben wollten! Aber sie treten allenthalben auf mit dem Anspruche der Wirklichkeit[1]).

Selbst die beiden obigen Beispiele gehen in der Praxis des Lebens so ziemlich verloren. Denn auch wer ein Haus kaufen will, fragt erst nach der Kaufsumme, dann oder zugleich nach dem Mietertrag und berechnet sich nun die betreffende Hundertelzahl, nicht aber das Kapital. Und jener künftige Rentenbezieher bekommt die Drucksachen der Rentenbank vorgelegt und liest nun aus den Tabellen ab, wie hoch Versicherungssumme, Einzahlungssumme, Rente usw. ist unter den verschiedensten Bedingungen. Ergebnis: im praktischen Leben kommt das rechnerische Kapitalsuchen nicht vor. Und genau so ist es mit dem Suchen der Zeit — mit Ausnahme der Diskontrechnung; darüber wird noch zu reden sein im Plane des Rechenunterrichts. Doch sei hier darauf hingewiesen, daß wir diese Rechnungsform eingliedern unter das berufliche Rechnen, das die allgemein bildenden Schulen den Berufsschulen zu überlassen haben[2]).

Damit verbleiben von der früheren Übersicht in der Hauptsache noch zwei **Problemgruppen**: daß die Hundertelzahl bekannt ist und angewendet werden soll zu verschiedenen Berechnungen, und daß die Hundertelzahl erst gesucht werden soll. Blicken wir nun nach dem Hauptziel zurück! Wenn wir uns von dem Gedanken leiten lassen, daß wir in dieser Rechnungsform Qualitätsunterschiede zahlenmäßig auszudrücken suchen, so erscheint uns der

[1]) Z. B.: Ein Konsumverein verteilt am Ende des Jahres an seine Mitglieder $8\frac{1}{2}\%$ Reingewinn. Für wieviel Mark Waren muß eine Familie, die 30,77 Mark vom Gewinn empfängt, im Laufe des Jahres entnommen haben? Zunächst: Wen kann wohl das „muß" interessieren? Und dann: Jene Familie addiert selbstverständlich erst ihre Gutscheine, fragt nach den Prozenten und rechnet nun ihren Anteil aus. Sie muß diese Addition schon aus geschäftstechnischen Gründen vorgenommen haben. Die Nachbarin aber, die sich für die Höhe der Kaufsumme interessiert, wenn sie der Rabattzahlung beiwohnt, begnügt sich mit der Schätzung und braucht dazu nicht in der Schule zu lernen, „wie man das Kapital sucht". So unerträglich sind sie fast alle; die noch einigermaßen erträglich sind, haben den Charakter von Rechenrätseln.

[2]) Ich habe in meinem ganzen Leben noch nicht nötig gehabt, eine Diskontrechnung praktisch auszuführen, nur im Unterricht; und viele andere aus den verschiedensten Berufen, die ich gefragt habe, berichten dasselbe von sich.

Fall, daß die Hundertelzahl zum Zwecke des Vergleichs berechnet werden soll, weitaus als der natürlichere und erste. Der andere aber, daß die Hundertelzahl schon berechnet ist, fertig vorliegt, uns mitgeteilt wird, kann doch nur den Sinn haben, unsere Auffassung der Sachlage zu unterstützen oder Motiv für unsere Entschließungen zu werden, rechnerisch aber nur den, Vorausberechnungen und Nachprüfungen vorzunehmen. Dieser Fall hat wesentlich kompliziertere Voraussetzungen, über die wir uns nicht täuschen dürfen durch die Einfachheit vieler Übungsaufgaben unserer Rechenbücher.

Wollen wir also die Kinder hineinführen in den Geist der Sache, so empfiehlt es sich, zunächst einmal den Hauptgedanken mit allem Nachdruck zur Darstellung zu bringen. Dies geschieht, indem wir die Hundertelrechnung mittels zweier Stufen einführen. Auf der ersten werden die Kinder angehalten, die in ihren Gesichtskreis tretenden einfacheren Fälle der Frage: Wieviel kommen auf 100? zu beantworten — in der Redeweise der alten Didaktik: eine Stufe, auf der die Prozente gesucht werden.

Dabei ist es durchaus nicht nötig, diese Stufe etwa erst nach der Bruchrechnung einsetzen zu lassen. Es gibt eine große Zahl Aufgaben und Veranlassungen, die viel eher zu berechnen sind. Dem Gedanken des qualitativen Vergleichs sind die Kinder in der Tat weit früher zugänglich, als der beliebig gebrochenen Zahl. Das Beispiel: Vorige Woche hattet ihr 600 Aufgaben gerechnet, dabei waren 30 Fehler; diese Woche 800 Aufgaben mit 32 Fehlern — ist für die Kinder des 4. Schuljahres durchaus angemessen. Die Problemfrage: Welche Arbeit war besser? wird nur von Voreiligen rasch und falsch beantwortet; solche dagegen, die im Zahlenvergleichen nur irgend etwas geschult sind, bemerken sofort dazu: Aber beim zweiten Male hatten wir doch viel mehr Aufgaben gerechnet und bloß 2 Fehler mehr! Sie haben das bestimmte Gefühl, daß die zweite Arbeit besser sein müßte, und daß sich dies auch herausstellen würde, wenn man gleiche Verhältnisse in Betracht ziehen könnte. Es bedarf nun eigentlich nur der Anregung, um die Kinder selbständig weiterarbeiten zu lassen: Versucht, ob das auszurechnen geht! Die gröbste, aber doch noch zulässige Form wäre es, zu sagen: Rechnet aus, wieviel Fehler jedesmal auf 100 Exempel kommen!

Ähnliche Beispiele werden nun bei jeder Gelegenheit herangezogen: 2000 Einwohner hat unser Ort, dabei 320 Schulkinder; das Nachbardorf hat 700 Einwohner und 120 Schulkinder usw. Selbstverständlich kann man, wenn es zweckmäßig erscheint, die Zahlen abrunden. Auch brauchen die Divisionen nicht einmal auf-

gehen; die Kinder helfen sich dann mit Ausdrücken wie: über, reichlich, knapp, fast usw.: „reichlich 17 auf 100".

Auch auf Umwegen erreichen wir die Hundertelzahl. Von 50 auf 100 zu schließen macht keine Mühe, von 40 auf 100 schon mehr; doch finden sofort einige, daß man doch von 40 auf 200 schließen könne und von da auf 100. Also: 40 Kinder hatten 6 Fehler; die andere Klasse mit 50 hatte 7; welche hatte besser gearbeitet? Und so schließen sie von der 80 über die 400, von der 15, 30, 60, 75 und 150 über die 300, von der 125 und 250 über die 500, von der 24 und 120 über die 600 usw. So lassen sich schon Aufgaben bewältigen wie diese: 60 Kartoffelzeilen haben 40 Zentner Kartoffeln ergeben; 55 Zeilen beim Unterdorfe 38 Ztr. Wo war der größere Ertrag?

Der Umkreis der Aufgaben erweitert sich beträchtlich infolge der Bewältigung der Bruchrechnung — schon deren Mittelstufe hat diese Wirkung. Dazu kommt noch der Fortschritt von der heimatlichen zur vaterländischen und zur deutschen Erdkunde, die nun ihrerseits ununterbrochen Veranlassung gibt, Qualitäts- und Verteilungsunterschiede zu berechnen. Es seien einige umfassende Gruppen angeführt:

Die Bevölkerungsverhältnisse des Ortes, des Landes — der Länder —, im besonderen ihre Verteilung nach Stadt und Land, nach Erwerb, Sprache, Konfession; die Zunahme der Bevölkerung, die Geburtenhäufigkeit, die Sterblichkeit, dabei die Anteile der wichtigsten Krankheiten, ferner die Schulbildung, die Rechtspflege, auch das kirchliche Leben usw.

Die Bodenverhältnisse, und zwar die Gestaltung des Bodens, wie sie sich zeigt im Gefälle der Flüsse, in der Steigung der Eisenbahnen und Straßen, im Vorhandensein von Durchstichen, Dämmen und Brücken; weiter die Ergiebigkeit und Auswertung des Bodens in land- und forstwirtschaftlicher Hinsicht einerseits, in berg- und wasserwirtschaftlicher andrerseits; ferner die Verteilung des landwirtschaftlichen Bodens nach der Art seiner Benutzung: Garten, Acker, Wiese, Weide usf., nach der Art der Frucht: Roggen, Hafer, Weizen, Mais usw.

Weitere volkswirtschaftliche Verhältnisse: Anteil an der Produktion der verschiedensten Dinge, Anteil am Handel, am Verbrauch, am Verkehr; Steigen und Sinken der Lebensmittelpreise, Anteil der Einkommensklassen an den Steuern usw. usw. — und zwar dies alles nicht nur im Vergleich der Orte und Länder miteinander, sondern auch in seinem Wechsel, also mit Berücksichtigung nicht nur der örtlichen, sondern auch der zeitlichen Unterschiede.

Die Privatwirtschaft braucht dabei nicht vernachlässigt zu

werden: der Zinsertrag eines Hauses, eines Geschäfts wird nach Hunderteln gewertet, ebenso der Wasserverlust von Heu, Räucherwaren, Seife usw. Dies letztere aber führt uns bereits in das Gebiet der Naturkunde, die auf der nun folgenden Stufe besonders herangezogen werden soll.

Wenn nämlich die erste Stufe der Hundertelrechnung in solcher Weise vorgearbeitet hat, dann ist es eine Leichtigkeit, die zweite Stufe darauf aufzubauen. Doch muß noch bemerkt werden, daß der leitende Gedanke jener ersten Stufe, der zahlenmäßige Ausdruck qualitativer Unterschiede, nun nicht etwa abgelöst wird von einem anderen Hauptgedanken, sondern daß er gewissermaßen selbständig weiter wächst, während ein anderer hinzutritt.

Diese **zweite Stufe** würde nämlich alle diejenigen Verhältnisse und Probleme umfassen, bei denen die **Hundertelzahl gegeben** ist, fertig vorliegt. Wenn wir vorhin andeuteten, daß dies vielfach den Sinn habe, unsere **Auffassung der wirklichen Sachlage zu unterstützen**, so dachten wir dabei zunächst an das große Gebiet der gesamten Naturkunde einschließlich Gesundheitslehre und Physik, vor allem an die unzähligen Stellen, an denen praktische Chemie in Betracht kommt: Zusammensetzung des Pflanzen- und Tierkörpers, Bedingungen ihres Wachstums und ihrer Leistungsfähigkeit — sowie diese selbst, Nährstoffgehalt der Speisen, die gesamte Mineralogie, die Wirkungen der Wärme, der Elektrizität und des Lichts usf. Es gibt kaum ein wichtigeres Thema dieses gewaltigen Gebiets, bei dem nicht der Gebrauch der Hundertelzahl zur Klärung der Tatsachen durchaus nötig wäre. Hierauf soll aber bei einer späteren Gelegenheit noch eingegangen werden.

Sodann hat die Hundertelzahl — wie ebenfalls schon angedeutet wurde — noch den Sinn, **Motiv für unser Handeln** zu werden. Selbstverständlich kommt hier zunächst nicht das sittliche, sondern das wirtschaftliche in Betracht. Hier ermöglicht uns die Hundertelzahl, Vorausberechnungen und Nachprüfungen vorzunehmen. Dies ist nun das eigentliche Gebiet dieser zweiten Stufe. Sie bearbeitet es jetzt mit viel größerem Erfolge, weil sie ja infolge der tiefgehenden Vorbereitung durch jene erste Stufe nun nicht nötig hat, um der rechentechnischen Gesichtspunkte willen alles Sachliche durcheinander zu werfen. Vielmehr sind wir nun in der Lage, ein **Sachgebiet** zur Grundlage der zweiten Stufe zu machen, nämlich die **Kapitalbildung und Kapitalverwertung**. Es ist das ein außerordentlich wichtiges Gebiet, ein Gebiet, für das jede allgemein bildende Schule unbedingt vorbereiten muß; und zwar ist der Rechenunterricht die ganz naturgemäße Stelle für diese Bildungsarbeit. Wohl hat der bisherige es auch versucht, aber Gliederung und Orientierung dieses Stoffes nach

rechentechnischen Gesichtspunkten machte eine genetische und sachlich klärende Darstellung unmöglich.

Die **Kapitalentstehung** im großen darf füglich hier übergangen werden, desto mehr ist auszuführen die durch die **Ersparnisse**. Sie zeigt sich einerseits in der **Verminderung der Ausgaben** durch **Entsagung** in bezug auf teure Nahrungsmittel, Gewürze, Alkohol und Tabak, andere Genußmittel, Luxus in Kleidung und Schmuck, Nachahmung entbehrlicher Bedürfnisse, Verbrauch entbehrlicher Mengen usw., ferner durch sorgfältige **Instandhaltung** der Kleidung, der Wirtschaftsgeräte, der Schulbücher, durch Verwertung der Reste und Abfälle usf., weiter durch **Einkauf in größeren Mengen**, gegebenenfalls durch gemeinsamen Warenbezug usf. Sie zeigt sich andrerseits in der **Erhöhung der Einnahmen** durch gelegentliche oder regelmäßige Mehrleistungen, durch Eigenerzeugung — Kleingartenbau —, durch passende Erwerbstätigkeit der Familienglieder, endlich durch Zwangssparen kleiner Beträge, wie sie in Rabattsparvereinen und Schulsparkassen verwirklicht ist. Alle diese Gedanken, die selbstverständlich schon bei anderen unterrichtlichen Gelegenheiten — z. B. gelegentlich beim Lesen — eine gewisse Vorbereitung erfahren haben, werden hier nun sachlich und zum Zwecke zahlenmäßiger Bearbeitung zusammengestellt. Diese rechnerische Auswertung erfolgt selbstverständlich unter weitestgehender Benutzung der Hundertzahl. Insbesondere kann an sie angeschlossen werden alles, was man bisher unter **Rabattrechnung** zusammengefaßt hat, und was nicht speziell dem Kaufmannsberufe angehört, sondern von allgemeiner Bedeutung ist. In der Hauptsache wird es sich dabei um Rabattsummen handeln, allgemeiner: um ersparte Summen. Daneben soll um der mathematischen Bildung willen nicht ausgeschlossen sein, daß auch zu Aufgaben angeregt wird, in denen die Hundertzahl oder die Stammsumme (das Kapital) zu berechnen ist. Nur dürfen solche Aufgaben nicht den Anspruch erheben, lebenswahr zu sein. Sie müssen sich als das zeigen, was sie sind: rechnerische Turnübungen, nützlich und gut zu treiben und in der Einkleidung der rechnerischen Rätselfrage auch hinreichend gefühlsbetont zu gestalten.

Der zweite Teil dieses Gebiets betrifft die **Kapitalanlage**. Sparkasse, Staatspapier, Hypothek, Aktien, Geschäftsunternehmen, Beteiligung sind hierbei die wichtigsten Formen, die sachlich und rechnend zu beurteilen sind, und zwar sie alle mit der immerwährenden Ergänzung durch die Begriffe der verschiedenen Sicherheit und der möglichsten Sicherung. Endlich kommen dazu die Hauptformen der **Arbeit mit fremdem Kapital** im Grundbesitz und im Geschäftsleben, die auf der Voraussetzung beruhen,

daß die Tüchtigkeit des Betreffenden imstande ist, einem vorhandenen Kapital einen höheren Ertrag abzugewinnen, als der übliche Mittelertrag ihn darstellt.

Alle diese Formen zusammen ergeben das Gebiet der Zinsrechnung, der Gewinn- und Verlustrechnung, soweit sie allgemeine und nicht ausschließlich kaufmännische Bedeutung hat. Dabei kommt — wie oben — der Zinssumme, der Gewinn- und Verlustsumme die größere Wichtigkeit zu; während die Berechnung aller übrigen Größen nicht ausgeschlossen ist, aber in demselben Sinne wie oben lediglich als abstrahierte Rechenübung, die in dieser Abstraktion ihr Sonderziel hat.

§ 40. Die bürgerlichen Rechnungsarten.

Unter bürgerlichen Rechnungsarten verstand der bisherige Rechenunterricht höherer und niederer Schulen die Schlußrechnung (Regeldetri), Prozent- und Zinsrechnung, endlich Gesellschafts- und Mischungsrechnung; doch ist dieser Gebrauch nicht allgemein; vielfach nannte man Schlußrechnung besonders, oft stellte man auch Schlußrechnung, Prozentrechnung und bürgerliche Rechnungsarten nebeneinander, so daß unter den letzteren eigentlich nur noch Gesellschafts- und Mischungsrechnung zu verstehen war.

Von der Schlußrechnung ist schon die Rede gewesen, vor allem in dem Sinne, daß wir es für unrichtig halten, Rechenschlüsse — und damit Schlußrechnen — hinauszuschieben bis hinter die Bruchrechnung. Wir konnten wiederholt zeigen, daß die Gewinnung und der Gebrauch des kleinen Einmaleins auf dem Schlußrechnen aufzubauen haben. Wenn auszurechnen ist, wieviel 5 Zitronen kosten von einer Sorte, von der man 3 Stück mit 21 ₰ bezahlt hat, so ist das zwar eine vollendete Regeldetriaufgabe, sie hat aber ihre Stelle dort, wo das kleine Einmaleins erworben wird. Ja, es hindert uns nichts, den Begriff des Schlußrechnens auszudehnen auch auf Addition und Subtraktion. Es wird ebensogut ein Rechenschluß vom Kinde verlangt, wenn es vor der Aufgabe steht: Rate[1]), wieviel Pfennige ich in dieser Tasche hatte; 10 ₰ kostete die Straßenbahn, 2 ₰ gab ich meiner Lydia in die Sparbüchse, nun finde ich noch einen Fünfer... Aber selbst wer gegen diese Ausdehnung des Begriffs Bedenken trägt und das Schlußrechnen nur auf das Verhältnis von Einheit und Mehrheit und auf das verschiedener Mehrheiten bezieht, wird nach allen unsern Darlegungen nicht daran zweifeln können, daß das Schlußrechnen nicht eine besondere Rechnungsart ist, die im 6. oder 7. Schuljahre aufzutreten hätte, sondern

[1]) Kindliche Form für „Rechne“

daß es vielmehr die eigentliche Grundlage unsers gesamten Rechenunterrichts bedeutet.

Selbst die schwierigeren und zusammengesetzteren Fälle der Rechenschlüsse begründen nicht eine besondere Rechnungsart. So erscheint nichts einfacher als das Rechnen mit umgekehrten Verhältnissen, allerdings unter der Voraussetzung, daß es richtig angefaßt wird, nämlich in voller plastischer Anschaulichkeit. Z. B. Deine Mutter schält jetzt einen Topf Kartoffeln. Das dauert 20 Minuten. Am Sonntag kannst du ihr dabei helfen. Rechne, wie lange es dann dauert! Nur völlig schematisch gewöhnte Kinder, nur ganz mechanische Rechner sagen dann: 40 Minuten. Die anderen Kinder können laut lachen, wir selbst können uns aufregen über solche „Unachtsamkeit" [1]). Ein unbeeinflußtes Kind, das nicht mechanisch gewöhnt ist, sagt ohne weiteres: Wenn ich helfe, da geht es fixer. Und wenn wir dann den Fall erleichtern und hinzufügen: Wir wollen einmal denken, du könntest gerade so schnell Kartoffeln schälen wie deine Mutter ... dann fühlt auch ein jüngeres Kind, daß es dann jedenfalls nur die halbe Zeit dauern wird. Wenn dann dies gefühlsmäßige Ergebnis auch noch mit leichteren Schulleistungen (z. B. Übungsrechnen, wie Multiplikation zweistelliger Zahlen mit einstelligen) nachgeprüft wird, mehrmals selbstverständlich, so stellt sich heraus, daß drei Personen nur den 3. Teil der Zeit brauchen wie eine, fünf nur den 5. Teil usw., wenn von ihnen zusammen eine feststehende Leistung vollbracht werden soll. Selbstverständlich läßt es sich auch in andrer Weise klar machen, etwa so: Wenn ihr zu zweit schält, da geht es anders zu, als wenn deine Mutter allein ist; erzähle! ... Da nimmt jedes eine aus der Schüssel und schält sie, und wenn die fertig ist, jedes wieder eine. Da bekommt die Mutter die Hälfte und ich die Hälfte, und da braucht die Mutter bloß 10 Minuten dazu und ich auch ... Zu solchen Aufgaben brauchen wir aber nicht erst die Bruchrechnung zu erledigen, brauchen nicht bis zum 7. Schuljahr zu warten, die gehören auf viel frühere Stufe. Dem einen großen Fehler der verfrühten Abstraktion stellt eben unser Rechenunterricht den andern der verspäteten Wirklichkeitsrechnung an die Seite [2]).

[1]) Nur sollen wir uns in solchem Falle nicht über das Kind aufregen, sondern über unsere falsche Methode, die in ihrem Mechanisierungseifer die sachliche Seite jeder Aufgabe möglichst kurz abtat oder sie „entwickelte", was auf dasselbe hinauskommt.

[2]) Wozu dann in diesem Falle meist auch noch die geradezu hilflose Einkleidung kommt von den 6 Arbeitern, die einen Graben in 10 Tagen ziehen sollen, wobei statt der 6 nur 4 erscheinen. Wo in aller Welt kommt dieser sachliche Fall vor, und welches Kind von allen Kindern der Welt wäre schon in die Lage gekommen, so etwas im Ernstfalle ausrechnen zu müssen!

Auch **zusammengesetzte** Schlußformen bedingen keine neue Rechnungsart. Die uns vorliegenden Rechenbücher für die Volksschule gehen nur ausnahmsweise über ein zweifaches Verhältnis hinaus. Dies läßt sich natürlich auflösen in zwei einfache, welche einzeln berechnet werden. Die Aufgabe: 8 Arbeiter verdienen in 5 Tagen 120 ℳ; wieviel 3 Arbeiter in 3 Tagen? kann schon der Mittelstufe gestellt werden, die Divisionen übt.

Nachdrücklich müssen wir darum betonen, daß vom Standpunkte der heutigen psychologischen Erkenntnis und der aus ihr gewonnenen didaktischen Einsicht das späte Auftreten des Schlußrechnens als ein nicht geringer Fehler erscheint. Gleichwohl dürfen wir uns nicht der Verpflichtung entziehen, zu erforschen, wie dies eigentlich geschehen konnte, während doch gleichzeitig die allgemeine Verfrühung der Abstraktion zu bemerken war. Wir glauben, die Motive dafür in einer Erscheinung zu finden, die dem Blicke der heutigen Methodiker mehr und mehr entschwunden ist, in der **schriftlichen Darstellung der Schlußrechnung**. Die älteren unter uns werden sich noch besinnen können, daß wir in unsern Kinderjahren angehalten wurden, die Schlußrechnungen je nachdem entweder mit dem Kettensatze oder mit dem langen Bruchstriche auszuführen. Zwei Beispiele mögen jene Zeit ins Gedächtnis rufen.

Wieviel ℳ kostet 1 m, wenn 28 Yards mit 2 £ gekauft werden, 35 Yards = 32 m und 1 £ = 20,50 ℳ sind?

Das wurde so gerechnet, daß immer ein Glied wie das nächste lautete, und daß Anfangs- und Endglied gleich waren, also folgendermaßen:

? ℳ	1 m
32 m	35 Yards
28 Yards	2 £
1 £	20,50 ℳ

und nun wurde die rechte Seite durch die linke dividiert, dadurch wurde das gewünschte Ergebnis gewonnen:

$$\frac{25 \cdot 2 \cdot 20{,}50}{32 \cdot 28} = \frac{102{,}50}{64} = 1{,}60 \text{ ℳ}$$

Ein Wasserbehälter von 8 m Länge, 5 m Breite und 7 m Tiefe wird von 5 Röhren in 4 Tagen gefüllt. Wieviel gleich ergiebige Röhren sind notwendig, um ein Reservoir von 10½ m Länge, 6 m Breite und 8 m Tiefe in 3 Tagen zu füllen?

Dazu machten wir folgenden „Ansatz“:

Bei 8 m L. 5 m Br. 7 m T. bei 4 Tg. braucht man 5 Röhren;
„ 10½ „ „ 6 „ „ 8 „ „ „ 3 „ „ „ ? „

und nun wurde mit Bruchstrich gerechnet:

$$\frac{5 \cdot 10^1/_2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4}{8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3} = 12 \text{ Röhren.}$$

Dabei war zu sprechen: Bei 8 m Länge des Behälters braucht man 5 Röhren (hingeschrieben: 5); würde der Behälter nur 1 m lang sein[1]), so brauchte man nur den 8. Teil der 5 Röhren — die 8 wird dabei als Divisor hingeschrieben; da der Behälter aber 10½ m lang ist, so braucht man 10½ mal soviel Röhren als bei 1 m Länge usw.

War der Bruchsatz fertig, so wurde gekürzt und ausgerechnet. Bei beiden Beispielen wurden die schriftlichen Formen als Hauptsache angesehen. Ohne diese besonderen Formen der schriftlichen Darstellung hätten wir diese beiden Beispiele vielleicht auf folgende Weise gerechnet:

Die angegebenen 28 Yards werden 41 ℳ kosten, nämlich 2·20,50 ℳ; 35 Yards noch ¼ dieser Summe, nämlich 10,25 ℳ mehr = 51,25 ℳ. Diese Zahl ist durch 32 zu teilen, ergibt 1,60 ℳ.

Der erste Behälter hat 280 cbm Inhalt; wenn 5 Röhren in 4 Tagen ihn füllen, so füllt eine Röhre täglich den 20. Teil, also 14 cbm. Der andere Behälter hat 504 cbm Inhalt; da die Füllung in 3 Tagen beendet sein soll, aus jeder Röhre also nur 42 cbm fließen können, so muß man dazu soviel Röhren öffnen, wie 42 in 504 enthalten ist, nämlich 12.

Vergleicht man diese beiden Lösungsformen, so erkennt man sofort, daß der **Kettensatz** mechanisch sehr leicht erlernbar ist, daß er aber nur für voneinander **abhängige** Bedingungen zu brauchen ist, **nicht** für voneinander **unabhängige**, wie sie das Röhrenbeispiel zeigt, auch nicht für umgekehrte Verhältnisse. Er wird daher dort verwendbar erscheinen, wo diese letzteren Fälle nicht in Betracht kommen, wie bei kaufmännischen Umrechnungen von Gewichten und anderen Maßen, von Münzsorten, Spesenaufschlägen u. dgl., nicht aber dort, wo irgend das selbständige Urteil des Schülers in Frage kommt über die gegenseitige Abhängigkeit der Bedingungen oder über das Vorhandensein direkter oder indirekter Verhältnisse. In allgemein bildenden Anstalten wird er daher wohl nur als eine Form beruflicher Erleichterung Erwähnung finden dürfen.

Diesem selbständigen Urteilen des Schülers wird aber nach beiden Richtungen hin Raum gewährt durch den **Bruchsatz**. Er ist logisch völlig klar, besonders läßt er die Wirkung jeder einzelnen Bedingung klar in die Erscheinung treten.

Die mechanische Erleichterung, die der Kettensatz gewährt, und die logische Klarheit, die der Bruchsatz zeigt, haben nun diesen beiden Darstellungsformen — vor allem der zweiten — eine so über-

[1]) Man stelle sich das vor, zugleich mit den übrigen Maßen.

ragende Bedeutung verschafft, daß man dort, wo von Schlußrechnung als einer „bürgerlichen Rechnungsart" die Rede war, eigentlich nicht das Schlußrechnen selbst, sondern nur eine besondere Form seiner schriftlichen Darstellung, vor allem die eine, den Bruchsatz, gemeint hat. Von hier aus wird sofort verständlich, warum man das an sich so leichte Schlußrechnen doch durchaus der Oberstufe vorbehielt: der Bruchsatz setzt natürlich das Verständnis der Bruchrechnung voraus. Die Mehrzahl der Methodiker und die Mehrzahl der Rechenbücher hat freilich — wie schon angedeutet — diesen Zusammenhang aus dem Auge verloren. Sie glaubte, die Schlußrechnung überhaupt gehöre ins 6. und 7. Schuljahr, und sie fing dort mit den elementarsten Dingen an. Man vergleiche daraufhin unsere Rechenbücher.

Auch die umgekehrte Beziehung war zu bemerken. Es gab auch solche, die augenscheinlich lediglich die schriftliche Form des Bruchsatzes als Schlußrechnung betrachten zu dürfen glaubten[1]). Ihnen schwebt jedenfalls das Ideal mechanischer Geläufigkeit vor; dies hat aber für uns nur Wert, wenn das volle mathematische Verständnis dahinter steht.

Unter der didaktisch-mathematischen Schlacke, die sich in den Lehrplänen der Oberstufe unter dem Namen Schlußrechnung aufgehäuft hat, ist aber doch ein Goldkorn zu finden. Es besteht in der Erkenntnis, daß man **einen Bruch ungeteilt und ungekürzt in der Rechnung weiterführen** darf, und daß es in vielen Fällen recht praktisch ist, dies zu tun, ihn also fortzuführen, bis sämtliche Bedingungen mit in die Rechnung aufgenommen worden sind.

Ein einfaches Beispiel. Ein Rest von 14,6 m Kleiderstoff ist mit 40 ℳ bezahlt worden; zu einem Kleide wurden davon 5,84 m gebraucht; wieviel ist für dies Stück zu rechnen? Hier wäre es ein ziemlich weiter Weg, auszurechnen: 1 m kostet 40 ℳ : 14,6 = 2,74 ℳ.
Hier heißt es vielmehr: 1 m kostet $\frac{40}{14,6}$ ℳ, und 5,84 m kosten 5,84 mal soviel, also

[1]) Ein Beispiel aus der Erfahrung. Die Aufgabe hatte gelautet: 11 Eier kosten 66 Pfg. (sie waren damals noch billig), wieviel kostet 1 Ei? Kinder des 2. und 3. Schuljahres rechnen nicht, sondern wissen — man wird den Gegensatz der Ausdrücke verstehen — daß dann 1 Ei 6 Pfg. kostet. Hier handelte es sich aber um das ... Schuljahr, in dem die Schlußrechnung durchzunehmen war. Da wurde erklärt, 1 Ei koste x Pfennige, und es sei folgendermaßen zu berechnen:

$$x = \frac{66 \cdot 1}{11}$$

gesprochen: x ist gleich 66 durch 11 mal 1. Auf meine Frage, wie denn das zu erklären sei, war keine Antwort zu bekommen. Jeder Einsichtige wird mir zustimmen, wenn ich mich gegen ein solches Verfahren erkläre.

$$\frac{40 \cdot 5{,}84}{14{,}6}$$

woraus man mit geringster Mühe das Ergebnis 16 ℳ feststellen kann.

Es unterliegt gewiß keinem Zweifel, daß man diese so durchaus praktische Darstellungsform eifrigst pflegen wird, sie nicht etwa bloß mechanisieren, sondern immer mehr in ihren Geist einzuführen sich angelegen sein lassen wird. Aber das Recht, als eine neue Rechnungsart aufzutreten, kann sie nicht beanspruchen. Demgemäß hat sie ihre Stelle dort zu finden, wo sie innerlich vorbereitet ist; das ist der Fall auf der dritten Stufe der Bruchrechnung, unter Umständen vielleicht schon gegen das Ende der zweiten.

Damit wird das, was wir bisher Schlußrechnung nannten, verteilt auf die übrigen Stufen des Rechenunterrichts. Das gesamte Rechnen ist füglich ein Schlußrechnen, dem zu gelegener Zeit auch die Darstellungsform des Bruchsatzes beigegeben wird. —

Die Gesellschafts- und Mischungsrechnung können wir zusammen behandeln. Auch der bisherige Rechenunterricht stellt sie nebeneinander auf die Oberstufe.

Bei diesen beiden „Rechnungsarten" drängt sich zunächst der Vergleich mit der Schlußrechnung auf. Während diese in eigenartiger Weise das gesamte Rechnen durchzieht, und vor allem zu seiner lebenswahren Gestaltung ganz erheblich beiträgt, so sind jene beiden anderen Formen im Vergleich dazu beinahe lebensfremd. Man gehe daraufhin die Rechenbücher durch, und man wird staunen über die Fülle der Phantasieaufgaben. Wenn man mathematische Rätsel sammeln wollte, könnte man aus den uns vorliegenden Rechenbüchern die Aufgaben der Gesellschafts- und Mischungsrechnung fast der Reihe nach abschreiben: diese unmöglichen Testamente, die mit Brüchen und Differenzen arbeiten, die den Gesamtbetrag der Erbschaft ausrechnen lassen usf.; diese Schlossermeister, die mit verschieden viel Gesellen an einem Baue arbeiten und zusammen eine bestimmte Summe erhalten, von der nun ausgerechnet werden soll, wieviel auf jeden kommt — statt daß jeder von ihnen seine Rechnung eingibt; diese Hausfrauen, die eine Sendung Reis teilen nach Bruchangaben — aber wie groß sie eigentlich ist, das wird erst ausgerechnet, nachdem sie geteilt und bezahlt ist; diese Kaufleute, die gemeinschaftlich Kaffee kaufen, aber zunächst feststellen, daß unter allen Umständen B 150 kg mehr nimmt als A usw., und nun ausrechnen, wieviel jeder eigentlich nehmen wird; diese Geschäftsgründer, die aus dem am Ende des Jahres verteilten Gewinn eigentlich erst ersehen, wieviel jeder von ihnen eingelegt hat ... Genug der Beispiele! Sie muten an wie schlechte Scherze, und haben doch den bitterernsten Hinter-

grund, daß an solchen Beispielen unsere Kinder rechnen und das rechnende Leben kennen lernen sollen! Denn sie stellen sich in keiner Weise als Phantasieaufgaben vor. Und in der Mischungsrechnung ist es fast noch schlimmer. Wo aber die Aufgaben hier wie da noch einigermaßen lebensmöglich sind, da betreffen sie ein Handelsgeschäft, gehören also ins berufliche Rechnen[1]).

Der Vergleich mit der Schlußrechnung zeigt ferner, daß bei Gesellschaftsrechnung und Mischungsrechnung ein bestimmtes Schema von so ausgeprägter äußerer Gestalt wie bei der Schlußrechnung nicht in Betracht kommt. Oder wenn es eins gegeben hat, so ist es schon seit mehr denn 40 Jahren verlassen worden. Ein äußerer Grund für die Entwicklung dieser Gliederung unserer Rechenarbeit, wie er bei der Schlußrechnung zu erkennen war, ist also hier nicht zu bemerken.

Wenn wir also zunächst feststellen müssen, daß die Aufgaben dieser „Rechnungsarten" entweder lebensfremd oder berufseigen sind, und daß zunächst auch kein äußerer Grund für eine solche Zusammenfassung und für ihr Erscheinen an dem üblichen Orte zu entdecken ist, so könnte doch behauptet und angenommen werden, daß mit ihrer Bewältigung eine besondere Art mathematischer Bildung erworben würde, die natürlich die übrigen Erwerbungen voraussetzte. Sehen wir sie daraufhin an!

Beide „Rechnungsarten" sind Divisionsformen, die mehr oder weniger mit anderen Operationen verbunden sind, vor allem mit Addition. Nur sind *die Teiler und die Teile nicht* wie bei der gewöhnlichen Addition *gleich, sondern verschieden.* Am klarsten erkennt man das aus den allereinfachsten Fällen:

Wenn der kleine Karl und sein größerer Bruder Fritz sich 25 ₰ teilen dürfen, und Karl soll jedesmal 2 ₰ bekommen und Fritz 3, so hat jener zuletzt 2, dieser 3 Fünfer vor sich.

Wenn Max vorgestern 6, gestern 4 und heute 5 Fehler hat, so sind das durchschnittlich auf den Tag 5.

Das wäre Gesellschaftsrechnung und Mischungsrechnung in einfachster Form. Dennoch zeigen beide Beispiele die Richtung der Kompliziertheit: bei der Gesellschaftsrechnung ist nämlich der Divi-

[1]) Ich muß zu meiner Schande gestehen, daß ich in meinem ganzen Leben noch keine Gesellschaftsrechnung nötig gehabt habe, außer im Unterricht. In unsern Zwanzigerjahren spielten wir zusammen Lotterie. 1 Zehntel Los zu 4,20 Mark zu vieren. Da war es selbstverständlich, daß jeder 1,05 Mark zahlte. Oder zu fünfen, dann kamen eben 84 Pfg. auf den Mann. Der Gedanke, die Einlagen könnten verschieden sein bei unserm Gesellschaftsunternehmen, ist uns gar nicht gekommen. Und Mischungsrechnung! Ich habe wirklich noch nicht ein einziges Mal Kaffee oder Spiritus oder Gold mischen oder eine solche Mischung berechnen müssen, und vielen hundert anderen — Nichtpädagogen — die ich darum gefragt habe, ist es gerade so ergangen.

sor nicht einfach mit der Zahl der Teilnehmer gegeben — 2, sondern die Verschiedenheit der Teilnehmer bedingt eine Verschiedenheit der Teile. Und bei der Mischungsrechnung sind es nicht gleiche Faktoren, die zu einer Gesamtwirkung zusammentreten, sondern ungleiche — wir sprechen wegen der ausgeprägten mathematischen Bedeutung des Wortes Faktor darum besser von Summanden oder verdeutschen für diesen Zweck das Wort Faktoren hier einmal durch „Wirkteile". Sie ermöglichen nun eine Division in dem Sinne, daß man sie mit gleichen Teilen vergleicht. Während also bei der einfachen Division und Multiplikation Teilnehmer und Produkt sowie Teilsumme als gleichsinnig entstanden zu denken war, sind jetzt die Wirkteile qualitativ verschieden.

Eine solche qualitative Verschiedenheit, die in eine Rechnung eingeführt werden soll, muß natürlich irgendwelchen zahlenmäßigen Ausdruck finden. Das geschieht in der Tat; bei jenem ersten Beispiel ist es der Bedarf der verschieden großen Kinder, bei diesem die Tagesleistungen, die eine in Zahlen ausgedrückte Wertung erhalten.

In sehr vielen Fällen erfolgt diese zahlenmäßige Wertung allerdings in der Form des Bruches, des gewöhnlichen wie des Hundertelbruches, der auf das Ganze bezogen wird. Dies bedeutet natürlich eine gewisse Schwierigkeit, die erst demjenigen solche Aufgaben zugänglich macht, der die Bruchrechnung im allgemeinen bewältigt hat. So angesehen, erscheint es **erklärlich**, daß man diese „Rechnungsarten" hinter die Bruchrechnung stellte. Es geschieht aber unseres Erachtens zu unrecht. Denn hinter oder in die Bruchrechnung gehören lediglich die mit Brüchen formulierten Fälle, leichtere aber gehören auf **wesentlich frühere Stufe**.

Der Sinn dieser Rechnungsformen — die Teilung in ungleiche Teile und das Zusammenwirken ungleicher Teile — ist nämlich so einfach, daß auch schon jüngere Kinder damit vertraut gemacht werden können. Eine Teilung in ungleiche Teile findet schon das Kind der Unterstufe gerechtfertigt, wenn man die Teilnehmer genügend vorstellt, z. B. Vater und Kinder. Will man sich von dem Gedanken leiten lassen, daß solche Aufgaben doch immer noch kompliziertere Formen der Division bedeuten, so kann man mit ihnen bis zur Mittelstufe warten.

Dabei wird es sich freilich empfehlen, die zum Teil rein äußerlichen, zum Teil irreführenden (-rechnung!) Bezeichnungen zu ändern. Wir schlagen vor, statt Gesellschaftsrechnung zu sagen: **Verteilungsaufgaben**, und statt Mischungsrechnung: **Durchschnittsaufgaben**.

Man kann dabei wirklich das Bedenken zurückstellen, daß der Ausdruck Verteilungsaufgaben ja gar keinen Unterschied mache

zwischen der gewöhnlichen Division und dieser komplizierten Form. Wir sehen nämlich gerade in dieser Betonung des Gemeinsamen einen Fortschritt: ob 2 Mädchen und 3 Knaben sich 25 ₰ teilen, oder ob Karl 2 und Fritz 3 Teile bekommen soll, ist doch im wesentlichen dieselbe rechnerische Erscheinung. Will man aber den Unterschied ausdrücklich hervorheben, so kann man sagen: Verteilungsaufgaben mit ungleichen Teilen; das trifft genau den Sinn und erklärt zugleich, ganz anders als der nichtssagende Ausdruck Gesellschaftsrechnung.

Der zweite Vorschlag, die Exempel der Mischungsrechnung als Durchschnittsaufgaben zu bezeichnen, wird kaum auf Bedenken stoßen. Bei jedem einzelnen handelt es sich tatsächlich um das Aufsuchen des Durchschnitts oder bei gegebenem Durchschnitt um das Aufsuchen eines mitwirkenden Teils. Jedenfalls werden beide Bezeichnungen einem erheblich früheren Einsetzen dieser Aufgabenformen gerecht.

Hierzu noch einige Beispiele, zunächst von Verteilungsaufgaben.

1. Teilt auch diese Nüsse, sagte die Mutter; Martin soll die Hälfte bekommen, weil er davon welche zu verschenken hat, Kurt $1/4$, und die übrigen hebt für Lenchen auf! Als Kurt mit Teilen fertig war, lagen 7 für Lenchen da. Da waren sie alle zufrieden, die Mutter und die Kinder. Bloß ihr nicht, denn ihr möchtet nun gern etwas wissen . . .

2. 3 Geschwister sollen sich in 15 Weihnachtsäpfel teilen, jedes größere soll immer einen mehr haben, sagt der Vater.

3. Zum Ableeren des Christbaums haben sich Paul und Marie 4 Schulfreunde eingeladen. Es wird für jedes Kind ein Teller zurecht gemacht, einer aber soll das große Los sein, da müssen doppelt soviel Zuckerringel drauf als auf einen anderen. Fortsetzung verschieden: 35 Ringel zählte die Mutter im ganzen, helft ihr rechnen! Oder: Alfred zog das große Los und fand 10 Ringel auf seinem Teller . . . Oder: Marie hatte Glück, sie zog das große Los und hatte 5 Ringel mehr auf ihrem Teller als ihr Bruder usw.

4. 3 Knaben machen für die Eltern Kartoffeln aus, 54 Zeilen; nach einer Stunde hat der kleine 2 Zeilen fertig, der mittlere 3, der große 4. Wie lange dauert's noch, wenn's so weiter geht? fragt Franz. Und wieviel wird dann jeder fertig gebracht haben? meint Emil. Als sie fertig sind, schenkt ihnen der Vater 90 ₰ für die Sparbüchse, die soll Erich verteilen nach den fertig gebrachten Zeilen; helft ihm rechnen!

5. 2 Hausfrauen kaufen zusammen $1/2$ Ztr. Zucker, dann rechnet ihnen der Kaufmann den Zentnerpreis von 21,60 ℳ. Frau Meier verlegt das Geld, gibt dem Boten noch 10 ₰ und behält 15 ₰; was hat Frau Schulze zu zahlen? Wieviel hat jede erspart?

Durchschnittsaufgaben lassen sich noch viel leichter und mehr gestalten und dazu auf allen Gebieten, vor allem auf dem der häuslichen Wirtschaftsführung, wobei der Durchschnittsverbrauch, der Durchschnittspreis, sowie der Ausgleich eines etwaigen Mehrverbrauchs in Frage kommt usw. Zu letzterem noch ein Beispiel. Frau Schmidt hat sich ausgerechnet, daß sie täglich 75 ₰ für Fleischwaren ausgeben darf. Nun bringt sie einen Festtagsbraten mit für 3,20 ℳ. Wie kann sie das ausgleichen, in derselben Woche? in dieser und der nächsten Woche? auf noch andere Art?

Ferner kommt für Durchschnittsaufgaben das ganze Gebiet der Schul- und anderer persönlicher Leistungen, z. B. auch turnerischer, sowie das Gebiet der heimatlichen und vaterländischen Erdkunde in Betracht — letzteres in ähnlicher Weise, wie wir es bei Hundertelrechnung angedeutet haben.

Zusammenfassend dürfen wir sagen: Auch die sogenannte Gesellschaftsrechnung und Mischungsrechnung sind als Stoffgebiete der Oberstufe unter dem Namen der bürgerlichen Rechnungsarten abzulehnen. In vertiefter Auffassung aber sind entsprechend geartete Aufgaben überall dort einzustellen, wo Leben und sonstiger Unterricht sie heranziehen. Auf diese Art gelingt es überdies, die Lebensfremdheit der beiden Aufgabengruppen fast gänzlich zu beseitigen.